نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: اختصاصی ریاضی - ۱۰۵۱۲

ام اس بوک

۱ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{ax^n + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ کدام است؟

① -۶ ② -۴ ③ ۳ ④ ۵

۲ - اگر $g(x) = \dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد $f'(۵)$ کدام است؟

① -۲ ② -۱ ③ ۲ ④ ۳

۳ - در کدام نقطه با طول صحیح از تابع $f(x) = ۴[x] + ۳[-x]$، حد چپ دو برابر حد راست تابع است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① ۱ ② -۱ ③ -۲ ④ ۲

۴ - حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} [\dfrac{۳x - ۱۰}{x - ۲}]$ کدام است؟

① -۲ ② ۳ ③ ۱ ④ ۲

۵ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}} \dfrac{۲ + ۲\cos ۴\pi x}{(۴x - ۱)^۲}$ کدام است؟

① $\pi^۲$ ② π ③ $\dfrac{\pi}{۲}$ ④ $\dfrac{\pi}{۴}$

۶ - اگر $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ و $g(x) = \dfrac{x^۲ + \sin^۲ x + ۲x\sin x}{x + ۱}$ آنگاه $۲ff'g + g'f^۲$ به ازای $x = ۱$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۲}$ ② $\dfrac{۱}{۴}$ ③ $-\dfrac{۱}{۴}$ ④ ۱

۷ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(۱ - x)^{۱۳۹۷}}{(۱ - x^۲)(۱ - x^۳)\cdots(۱ - x^{۱۳۹۸})}$ کدام است؟

① $\dfrac{۱}{۱۳۹۷!}$ ② $\dfrac{۱}{۱۳۹۸!}$ ③ $۱۳۹۷!$ ④ $۱۳۹۸!$

۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱ - \sin x} - \sqrt{۱ + \sin x}}{\sin x}$ کدام است؟

① ۱ ② -۱ ③ ۲ ④ -۲

۹ - حد کسر $\dfrac{\cos x \cos ۳x - ۱}{\sqrt{x^۲ + ۴} - ۲}$ وقتی $x \to ۰$ کدام است؟

① ۲۰ ② -۱۰ ③ -۲۰ ④ ۱۰

۱۰ - نمودار تابع $y = \sqrt{\dfrac{x^۳ - ۱۰}{x(x - ۲)^۲}}$ چند خط مجانب دارد؟

① ۳ ② ۴ ③ ۱ ④ ۲

۱۱ - تابع براکت $y = (۴x - ۳\pi)\left[\sqrt{۲}(\sin x + \cos x)\right]$ چند نقطه ناپیوستگی در بازه $(۰, ۲\pi)$ دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۶ ② ۵ ③ ۷ ④ ۸

۱۲- با فرض $y = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ حاصل $yy' \sin 2x + y \cos 2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ چقدر است؟

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۳- اگر تابع $f(x)$ در $x = 0$ مشتق‌پذیر و در یک همسایگی آن مثبت و همچنین $f^2(x) + f(x^2) = 3x^2 + 36x + 12$ باشد شیب مماس بر نمودار تابع f در نقطه به طول صفر واقع بر آن کدام است؟

① 6 ② -6 ③ 3 ④ $\frac{1}{6}$

۱۴- حد چپ تابع $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} + [x]}{4x^2 - 3x - 1}$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است)

① $0/1$ ② $-0/1$ ③ $-0/2$ ④ $0/2$

۱۵- حاصل $\lim\limits_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ کدام است؟

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π

۱۶- در تابع $f(x) = \begin{cases} [x] - 4 & , \ x < a \\ x^2 - 5x & , \ x \geq a \end{cases}$ اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) - \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -4$، آنگاه حاصل $f(-\frac{a}{2})$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

① -7 ② -4 ③ -5 ④ -6

۱۷- با فرض $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ تابع $f(x) = ay' - xy''$ خطی است. مقدار $f(2)$ چقدر است؟

① 8 ② 16 ③ 9 ④ 18

۱۸- حاصل $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x - 2} - 1}{x^2 - 9}$ کدام است؟

① صفر ② 1 ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{18}$

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sqrt{2} \sin x} & x < 0 \\ a + 1 & x = 0 \\ [\cot \frac{\pi}{x + 4}] + b & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد، $a + b$ کدام است؟

① -4 ② -3 ③ 4 ④ 3

۲۰- مقدار $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{-\cos 6x}}{\sqrt{\pi - 4x}}$ کدام است؟

① $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ ④ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

۲۱- معادله دایره‌ای که مرکز آن به طول -1 و بر دو خط به معادلات $y = x + 4, y$ مماس باشد، کدام است؟

① $x^2 + y^2 + 2x - 2y$ ② $x^2 + y^2 + 2x - y$ ③ $x^2 + y^2 - 2x + y$ ④ $x^2 + y^2 + 2x - 2y$

۲۲- معادله ی دایره‌ای که مرکز آن $(1, 3)$ باشد و با دایره $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ مماس خارج باشد کدام است؟

① $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ ③ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ ④ $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$

۲۳ - کدام نقطه از صفحه دایره $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$ از نقطه $(2, 1)$ به فاصله $\sqrt{20}$ می باشد؟

① $(3, -4)$ ② $(2, 5)$ ③ $(-2, 3)$ ④ $(1, 5)$

۲۴ - مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط دایره $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$ با زاویه 120° رؤیت می شود، کدام است؟

① $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$ ② $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 12$ ③ $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$ ④ $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 12$

۲۵ - c کدام باشد تا مماس مشترک خارجی دو دایره $x^2 + y^2 - c = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x = 0$ موازی محور y ها باشد؟

① 4 ② -4 ③ 6 ④ -6

۲۶ - معادله ی دایره ای که در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس است و خط $2x + 3y - 3 = 0$ بر آن عمود است. کدام است؟

① $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 18 = 0$ ② $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$ ③ $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ ④ $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 18 = 0$

۲۷ - مختصات نقطه ای روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم که از آن مماسی به طول $2\sqrt{2}$ بر دایره $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$ رسم کرده ایم، کدام است؟

① $(9, -9)$ ② $(3, -3)$ ③ $(-5, 5)$ ④ $(4, -4)$

۲۸ - چند نقطه با مختصات صحیح درون دایره $x^2 + y^2 = 4$ قرار دارد؟

① 9 ② 4 ③ 13 ④ 15

۲۹ - به ازای کدام مقدار m خط $2x - 3y + m = 2$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ مماس است؟

① $2, -24$ ② $2, -15$ ③ $3, -18$ ④ $3, -16$

۳۰ - خط به معادله $y = 2x + 3m - 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس است. m کدام است؟

① $-1 \pm \sqrt{5}$ ② $-2 \pm \sqrt{5}$ ③ $1 \pm \sqrt{3}$ ④ $2 \pm \sqrt{3}$

۳۱ - دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(2, -3)$ بگذرد. مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

① $(-1, 3)$ ② $(-1, 2)$ ③ $(1, -2)$ ④ $(1, -1)$

۳۲ - سطح دایره‌ی $4x^2 + 24x + 4y^2 - 8y = -2$ در چند ناحیه از نواحی صفحه‌ی مختصات قرار دارد؟

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

۳۳ - اگر معادلهٔ ضمنی دایره‌ای به مرکز $O(0, 1)$ که روی خط به معادلهٔ $x + y = 3$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا می‌کند به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$

۳۴ - مراکز دایره‌هایی به شعاع ۶ که بر هر دو خط $x = -2$ و $y = 4$ مماس‌اند را درنظر بگیرید. مجموع تمام طول‌ها و عرض‌های مراکز این دوایر کدام است؟

① 0 ② 8 ③ 16 ④ 24

۳۵ - از نقطهٔ $M(4, 0)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ رسم کرده‌ایم. طول پاره‌خطی که نقاط تماس را به یک‌دیگر وصل می‌کند کدام است؟

① $2\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 4 ④ 2

۳۶ - اگر نقاط A و B به ترتیب بر روی دو دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ و $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ قرار داشته باشند، آن‌گاه کم‌ترین طول پاره‌خط AB کدام است؟

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4

۳۷- اگر دایره‌ای به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ax + by + ۳۶ = ۰$ بر محور xها مماس باشد و $a + b = ۷$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

① ۱۷- و ۳۱ ② ۱۷ و ۳۱- ③ ۵ و ۱۹- ④ ۵- و ۱۹

۳۸- معادله مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط $x - y + ۶ = ۰$ و $y - x + ۲ = ۰$ مماس هستند کدام است؟

① $x - y + ۲ = ۰$ ② $x - y = ۲$ ③ $x + y + ۲ = ۰$ ④ $x - y = -۱$

۳۹- خط قائم گذرا بر نقطهٔ $A(۱, ۲)$ روی دایره، $x^۲ + y^۲ + mx + n = ۰$ محور yها را در نقطه‌ای به عرض (-۲) قطع می‌کند. $m + n$ کدام است؟

① ۳- ② ۳ ③ ۵ ④ ۵-

۴۰- اگر رابطهٔ $(k + ۱)x^۲ + \frac{۲y^۲}{k} + ۴x + (k - ۳)y + ۶ = ۰$، معادلهٔ یک دایره باشد، شعاع این دایره کدام است؟

① ۴ ② $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$ ③ ۳ ④ $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۴۱- چند نوع گراف ساده، همبند و نامنتظم وجود دارد که مجموع مرتبه واندازه آن ۱۰ باشد؟

① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۴۲- اگر $\Delta = ۷$ و $q = ۴۰$ باشد، حداکثر مقدار δ کدام است؟

① ۶ ② ۷ ③ ۵ ④ ۴

۴۳- چند نوع گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ ۱۰ وجود دارد؟

① ۵ ② ۴ ③ ۶ ④ ۳

۴۴- گراف G دارای پانزده یال است و مجموع درجات رئوس زوج آن ۲۰ می باشد. بیش ترین درجهٔ رئوس فرد گراف G کدام است؟

① ۱۰ ② ۹ ③ ۱۵ ④ ۵

۴۵- حاصل ضرب اندازه و مرتبهٔ یک گراف برابر ۲۰ است. نوع این گراف کدام نمی‌تواند باشد؟

① ناهمبند ② گراف کامل ③ همبند شامل دور ④ همبند فاقد دور

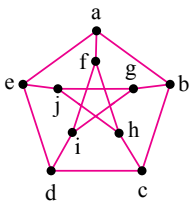
۴۶- درجهٔ تمام رأس‌های یک گراف ساده از مرتبه p و اندازه q برابر ۳ یا ۱ است. اگر رأس‌های با درجه یک دقیقاً نصف رأس‌های گراف را تشکیل دهند، آنگاه کدام گزینه زیر درست است؟

① $p = q$ ② $q > p$ ③ $\frac{p}{۲} < q < p$ ④ $q < \frac{p}{۲}$

۴۷- در گراف ساده و ناتهی G، رابطهٔ $q = \delta$ برقرار است. حداکثر تعداد اعضا در مجموعه‌های همسایگی باز رئوس این گراف کدام است؟

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۴۸- در گراف مقابل چند دور به طول ۹ وجود دارد؟



① ۱۰ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۱۲

۴۹- گراف همبند G با حذف ۸۲ یال به P_n و با اضافه کردن ۱۴۹ یال به K_n تبدیل می‌شود. n کدام است؟

① عددی اول ② مربع کامل ③ دارای عامل ۵ ④ دارای عامل ۳

۵۰- در یک گراف ساده $p = ۷$ و $q = ۱۸$، ۲ رأس درجه ۶ وجود دارد. این گراف چند رأس مینیمم درجه دارد؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۵۱ - گراف G یک گراف ۵− متنظم از مرتبهٔ p و تعداد یال‌های گراف $\bar{G}$، ۱۲ واحد کمتر از تعداد یال‌های گراف G است. تعداد یال‌های گراف G کدام است؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۸

۵۲ - گراف $K_۴$ چند زیرگراف دارد؟

① ۶۴ ② ۱۰۲۴ ③ ۱۱۲ ④ ۱۲۸

۵۳ - در گراف $K_۹$ از a به b چند مسیر به طول ۴ وجود دارد به شرط آنکه در همهٔ مسیرها از هیچ کدام از رأس‌های c و d عبور نکنیم؟

① ۶۰ ② ۹۰ ③ ۱۲۰ ④ ۱۸۰

۵۴ - در گراف $K_۹$ از a به b چند مسیر به طول ۴ وجود دارد، به شرط آنکه در همهٔ مسیرها از رأس e عبور کنیم ولی در هیچ‌کدام از رأس c عبور نکنیم؟

① ۶۰ ② ۹۰ ③ ۱۲۰ ④ ۱۸۰

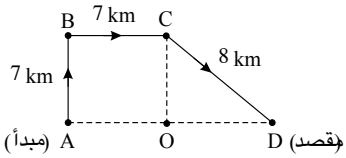
۵۵ - در گرافی از مرتبهٔ ۷ و اندازهٔ ۱۷، حدود δ به کدام صورت است؟

① $۲ \le \delta \le ۵$ ② $۲ \le \delta \le ۴$ ③ $۳ \le \delta \le ۵$ ④ $۳ \le \delta \le ۴$

۵۶ - نوسانگری روی پاره‌خطی به طول ۱۲ سانتی‌متر حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. این نوسانگر دو جابجایی مساوی و متوالی را بدون تغییر جهت انجام می‌دهد که مجموع آن‌ها برابر دامنهٔ نوسان است. اگر هر یک از این جابجایی‌ها در مدت ۰٫۰۴ ثانیه انجام شود، بیشینهٔ سرعت این نوسانگر چند متربرثانیه است؟ $(\pi = ۳)$

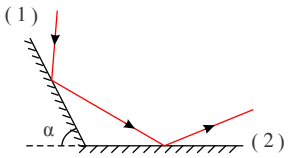
① صفر ② $\frac{۴}{۳}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۳}{۲}$

۵۷ - شکل مقابل مسیر حرکت متحرکی را نشان می‌دهد، مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی این متحرک به ترتیب چند کیلومتر است؟



① $۷ + \sqrt{۱۵}, ۲۲$ ② $۱۰, ۲۲$ ③ $\sqrt{۱۵}, ۲۲$ ④ $۷ + \sqrt{۲۲}, ۲۲$

۵۸ - مطابق شکل زیر، پرتو نوری به آینه‌ی تخت (۱) می‌تابد و در نهایت از آینه‌ی تخت (۲) بازتاب می‌شود. پرتو تابش به آینه‌ی (۱) با پرتو بازتابش از آینه‌ی (۲)، چه زاویه‌ای می‌سازد؟

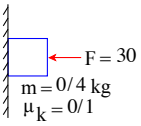


① α ② ۲α ③ $۱۸۰ - \alpha$ ④ $۹۰ + \alpha$

۵۹ - در فاصلهٔ ۲۰ متری از یک منبع صوت، تراز شدت صوت ۸۰ دسی‌بل است. در چند سانتی‌متری منبع، تراز شدت صوت ۱۲۰ دسی‌بل است؟ (از جذب انرژی صوتی توسط محیط صرف‌نظر کنید.)

① ۲۰ ② ۴۰ ③ ۸۰ ④ ۲۰۰

۶۰ - در شکل مقابل جسمی به جرم $۰٫۴kg$ با نیروی افقی F به دیواری فشار داده می شود. شتاب لغزش جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟



① ۰ ② ۱ ③ ۲٫۵ ④ g

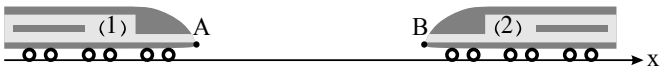
۶۱- جسمی به جرم ۲۵۰ گرم از ارتفاع ۴۰ متری سطح زمین رها می‌شود. نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت جسم ثابت و برابر ۲ نیوتون است. تندی برخورد جسم با سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰\ m/s^۲)$

① $-۲\sqrt{۱۰}$ ② $۲\sqrt{۱۰}$ ③ $۴\sqrt{۱۰}$ ④ $-۴\sqrt{۱۰}$

۶۲- شدت صوت حاصل از یک منبع صدا طبق رابطهٔ $I = ۱۰^t$ در SI با زمان تغییر می‌کند. چند ثانیه پس از روشن کردن منبع تراز صوتی ۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد؟ $(\log ۲ = ۰٫۳)$

① ۰٫۲ ② ۰٫۳ ③ ۰٫۶ ④ ۱٫۲

۶۳- مطابق شکل زیر قطار (۲) به طول ۴۰۰ متر با تندی ثابت $۱۰۸\ km/h$ و قطار (۱) به طول ۳۰۰ متر با تندی ثابت $۵۴\ km/h$ به‌طرف یکدیگر در مسیری مستقیم و در دو ریل موازی در حال حرکت هستند. اگر مکان جلوی دو قطار در یک لحظه برابر $x_A = -۲۰\ m$ و $x_B = ۶۰۰\ m$ باشد، در لحظه‌ای که دو قطار به‌طور کامل از کنار یک‌دیگر عبور می‌کنند، مکان نقطهٔ A کدام است؟

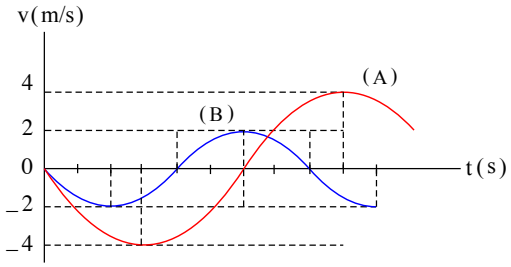


① $۱۰۰m$ ② $۳۰۰m$ ③ $۵۰۰m$ ④ صفر

۶۴- متحرکی نیمی از مسیر مستقیم بین دو نقطه را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و نیمهٔ دیگر مسیر را طی دو بازهٔ زمانی مساوی با سرعت‌های v و $۳v$ در یک جهت طی می‌کند. اگر سرعت متوسط متحرک در کل مسیر $۱۶\frac{m}{s}$ باشد، اندازهٔ v چند متر بر ثانیه است؟

① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۳۰ ④ ۶۰

۶۵- نمودار سرعت - زمان دو متحرکی که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهند، به شکل زیر است. دامنهٔ نوسان‌های نوسانگر (A) چند برابر دامنهٔ نوسان‌های نوسانگر (B) است؟

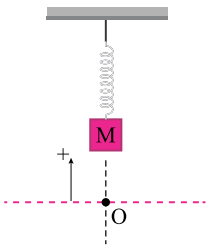


① $\frac{۴}{۳}$
② ۳
③ ۱۲
④ $\frac{۳}{۲}$

۶۶- جسمی به جرم $۲kg$ را به انتهای فنری با جرم ناچیز و طول عادی $۴۰cm$ و ثابت فنر $۶۴۰\frac{N}{m}$ بسته و حول سر دیگر فنر که ثابت است روی یک میز افقی بدون اصطکاک به‌طور یکنواخت دوران می‌دهیم. اگر در این حالت طول فنر به $۵۰cm$ برسد، دورهٔ این حرکت چند ثانیه است؟

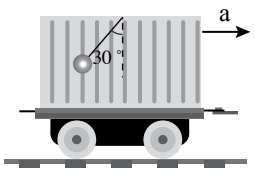
① π ② $\frac{\pi}{۲}$ ③ $\frac{\pi}{۳}$ ④ $\frac{\pi}{۴}$

۶۷- شکل مقابل یک لحظه از حرکت جرم متصل به فنری که در راستای قائم نسبت به نقطهٔ تعادل O حرکت می‌کند را نمایش می‌دهد. کدام گزینه صحیح است؟



① علامت سرعت الزاماً مثبت است.
② نوع حرکت الزاماً کندشونده است.
③ این متحرک می‌تواند در نقطهٔ آزاد فنر قرار داشته باشد.
④ علامت شتاب می‌تواند مثبت باشد.

۶۸ - شکل روبه‌رو واگنی را نشان می‌دهد که در سطح افقی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. وزنه‌ای که توسط نخ سبکی از سقف آن آویزان است از راستای قائم ۳۰° منحرف شده و نسبت به واگن ساکن مانده است. اندازهٔ شتاب حرکت واگن چه کسری از شتاب جاذبهٔ زمین است؟



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۶۹ - دو گلولهٔ هم‌اندازهٔ A و B $(m_A > m_B)$ از ارتفاع h رها می‌شود و با وجود مقاومت هوا به زمین می‌رسند. اگر قبل از رسیدن به تندی حدی پس از مدتی هر دو گلوله به زمین برسند چند مورد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

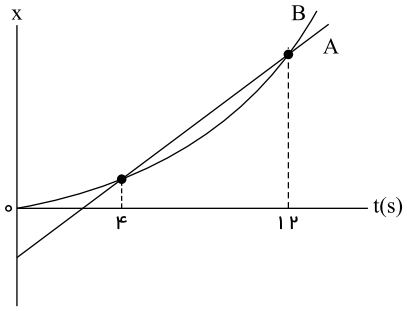
الف) زمان رسیدن A به زمین بیشتر از B است.

ب) در لحظهٔ برخورد به زمین تندی A بیشتر از B است.

پ) بزرگی نیروی مقاومت هوای وارد بر A در لحظهٔ برخورد به زمین بیشتر از B است.

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷۰ - نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متحرک B در چه لحظه‌ای برابر بزرگی سرعت متحرک A است؟ (نمودار B قسمتی از یک سهمی است.)



۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۵

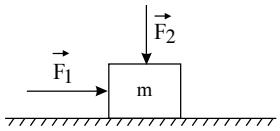
۷۱ - دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب‌های a و $\frac{۹}{۱۶}a$ هم‌زمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصلهٔ زمانی ۲ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۷۲ - فاصلهٔ ماهواره‌ای تا سطح زمین به اندازهٔ شعاع زمین است. اگر این ماهواره در مداری قرار گیرد که فاصله‌اش تا سطح زمین ۱٫۵ برابر شعاع زمین باشد، شتاب مرکزگرای آن چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ۲۰ درصد افزایش می‌یابد.
۲) ۲۰ درصد کاهش می‌یابد.
۳) ۳۶ درصد افزایش می‌یابد.
۴) ۳۶ درصد کاهش می‌یابد.

۷۳ - مطابق شکل زیر، دو نیروی افقی و قائم $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ به جسمی که روی سطح افقی قرار دارد، وارد می‌شود و جسم ساکن است. اگر بزرگی این دو نیرو، هریک ۲ برابر شود و جسم همچنان ساکن بماند، نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، k برابر می‌شود. کدام مورد درست است؟



۱) $۲ < k < ۳$
۲) $۱ < k < ۲$
۳) $k = ۲$
۴) $k = ۱$

۷۴ - متحرکی روی مسیر مستقیم از حال سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. مسافتی که در t ثانیهٔ n ام طی می‌کند چند برابر مسافتی است که در t ثانیهٔ m ام طی خواهد کرد؟

۱) $\frac{n}{m}$
۲) $\frac{۲n+۱}{۳m+۱}$
۳) $\frac{n+۱}{m+۱}$
۴) $\frac{۲n-۱}{۲m-۱}$

۷۵ - وزنه‌هایی به جرم $m_A = m$ و $m_B = ۲m$ به‌ترتیب به فنرهایی با ثابت k_A و k_B متصل هستند و دوره نوسان کم‌دامنه نوسان‌کننده B، دو برابر نوسان‌کننده A است. اگر انرژی مکانیکی این دو نوسان‌کننده برابر باشد، دامنه نوسان‌کننده B چند برابر دامنه نوسان‌کننده A است؟

① ۲ ② ۳ ③ $\sqrt{۲}$ ④ $۳\sqrt{۲}$

۷۶ - متحرکی با شتاب ثابت در مسیر مستقیم در حرکت است در لحظهٔ $t_۱ = ۲$ سرعت $۴۰\frac{m}{s}$ و درلحظهٔ $t_۲ = ۵s$ سرعت $۳۶\frac{km}{h}$ است. جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول چند متر است؟

① ۴۵ ② ۱۲۵ ③ ۸۰ ④ ۱۷۵

۷۷ - درباره موج‌های طولی و عرضی چند مورد درست است؟

الف) به هر دو موج طولی و عرضی که از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر حرکت می‌کنند، موج‌های پیش‌رونده می‌گویند.

ب) در موج طولی و عرضی ذرات محیط منتشر می‌شود.

ج) در موج عرضی راستای نوسان اجزاء محیط بر راستای انتشار موج، عمود هستند.

د) در موج طولی ممکن است راستای ارتعاش ذرات در امتداد y باشد.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۷۸ - دو بلندگوی A و B در یک محیط امواج صوتی منتشر می‌کنند. دامنه و فرکانس صدای تولید شدهٔ بلندگوی A به‌ترتیب ۶ و ۴ برابر بلندگوی B است. در نقطهٔ M که به فاصلهٔ d از چشمهٔ A و به فاصلهٔ $\frac{d}{۳}$ از چشمهٔ B واقع شده، تراز شدت صوت دریافتی از چشمهٔ A چند دسی‌بل بلندتر از چشمهٔ B است؟ $(\log_۲ = ۰/۳)$

① $۱۸dB$ ② $۹dB$ ③ $۲۷dB$ ④ $۳۰dB$

۷۹ - در یک طناب، موج عرضی با بسامد f در حال پیشروی است. اگر در طناب دیگری با همان سطح مقطع و با چگالی $\frac{۱}{۴}$ طناب اولیه و نیروی کشش ۴ برابر نیروی کشش اولیه، موجی با بسامد $۸f$ در حال پیشروی باشد، فاصله دو نقطه در فاز مخالف متوالی روی این طناب نسبت به طناب اول چند برابر می‌شود؟

① ۱ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ ۴ ④ $\frac{۱}{۲}$

۸۰ - یک دستگاه صوتی، صدایی با تراز شدت $\beta_۱ = ۲۸dB$ و دستگاه صوتی دیگر، صدایی با تراز $\beta_۲ = ۹۲dB$ ایجاد می‌کند. شدت‌های مربوط به این دو تراز (برحسب $\frac{W}{m^۲}$) به‌ترتیب $I_۱$ و $I_۲$ است. $\frac{I_۲}{I_۱}$ کدام است؟ $(\log ۲ = ۰/۳)$

① $۲/۵ \times ۱۰^۶$ ② $۲/۵ \times ۱۰^۸$ ③ ۴×۱۰^۶ ④ ۴×۱۰^۸

۸۱ - اگر E° یک سلول الکتروشیمیایی که در آن، واکنش: $A^{۲+}(aq) + B(s) \rightarrow A(s) + B^{۲+}(aq)$ انجام می‌گیرد با E° سلول الکتروشیمیایی دیگری که در آن واکنش: $B^{۲+}(aq) + C(s) \rightarrow B(s) + C^{۲+}(aq)$ انجام می‌گیرد برابر باشد، $E^\circ(B^{۲+}(aq)/B(s))$، برابر چند ولت است؟

$E^\circ(A^{۲+}(aq)/A(s)) = -۰/۴۱V, E^\circ(C^{۲+}(aq)/C(s)) = -۲/۳۷V$

① $+۰/۹۸$ ② $-۱/۳۹$ ③ $+۱/۹۶$ ④ $-۲/۷۸$

۸۲ - با توجه به داده‌های زیر، کدام واکنش در شرایط استاندارد به طور خودبه‌خود پیشرفت می‌کند و E° آن برابر چند ولت است؟

$E^\circ(Fe^{۲+}(aq)/Fe(s)) = -۰/۴۱V \quad , \quad E^\circ(Zn^{۲+}(aq)/Zn(s)) = -۰/۷۶V$

$E^\circ(Mg^{۲+}(aq)/Mg(s)) = -۲/۳۸V \quad , \quad E^\circ(Sn^{۲+}(aq)/Sn(s)) = -۰/۱۵V$

① $+۱/۹۷ - Fe(s) + Mg^{۲+}(g) \longrightarrow Fe^{۲+}(aq) + Mg(s)$

② $+۰/۶۱ - Zn(s) + Sn^{۲+}(aq) \longrightarrow Zn^{۲+}(aq) + Sn(s)$

③ $+۱/۱۱ - Zn(s) + Fe^{۲+}(aq) \longrightarrow Zn^{۲+}(aq) + Fe(s)$

④ $+۰/۳۵ - Fe(s) + Zn^{۲+}(aq) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + Zn(s)$

۸۳ - کدام عبارت، درست است؟

(۱) در سلول سوختی هیدروژن- اکسیژن، بخار آب از بخش آندی خارج می‌شود.

(۲) در اتصال نیم سلول استاندارد همه فلزها به SHE، SHE نقش کاتد را ایفا می‌کند.

(۳) در سلول الکترولیتی آبکاری آهن با مس، از آهن (II) سولفات به عنوان الکترولیت استفاده می‌شود.

(۴) در سلول گالوانی روی - مس، جهت حرکت کاتیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل به سمت الکترود مس است.

۸۴ - با توجه به معادله واکنش زیر (پس از موازنه)، کدام عبارت درست است؟

$$MnO_4^- + H^+(aq) + I^-(aq) \rightarrow Mn^{2+}(aq) + I_2(s) + H_2O(l)$$

(۱) در این واکنش، یون‌های یدید اکسنده بوده، کاهش می‌یابند.

(۲) به ازای مصرف هر یون پرمنگنات، پنج الکترون مبادله می‌شود.

(۳) به ازای مصرف هر مول یون پرمنگنات، پنج مول $I_2(s)$ تولید می‌شود.

(۴) در سلول الکتروشیمیایی تشکیل شده برای این واکنش، کاتیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل، به سوی آند حرکت می‌کنند.

۸۵ - اگر تیغه‌ای از جنس نیکل درون محلول نقره نیترات قرار گیرد، با مبادلهٔ $۳/۰۱ \times ۱^{۲۳}$ الکترون بین آن‌ها و با فرض این که تنها ۲۰ درصد از یون‌های نقره بر روی تیغه رسوب کند، جرم تیغه چه تغییری خواهد کرد؟

$(Ni = ۵۸\ ,\ Ag = ۱۰۸ : g \cdot mol^{-1})$ $\quad Ni + ۲Ag^+ \rightarrow Ni^{2+} + ۲Ag$

(۱) ۱۸/۴ گرم از جرم تیغه کم می‌شود. (۲) ۳/۷ گرم از جرم تیغه کم می‌شود. (۳) ۳/۷ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود. (۴) ۱۸/۴ گرم به جرم تیغه افزوده می‌شود.

۸۶ - در یک سلول ..... با انجام یک واکنش اکسایش - کاهش، الکترون‌ها در مدار بیرونی از ..... به‌سوی ..... می‌روند.

(۱) گالوانی - کاتد - آند (۲) الکترولیتی - کاتد - آند (۳) گالوانی - قطب منفی - قطب مثبت (۴) الکترولیتی - قطب منفی- قطب مثبت

۸۷ - اگر آلیاژی به جرم ۵۰ گرم از آلومینیم و مس را درون مقدار کافی از HCl قرار دهیم، پس از پایان کامل واکنش، مجموعاً $۲/۴۰۸ \times ۱۰^{۲۴}$ الکترون مبادله می شود، درصد جرمی مس در آلیاژ اولیه چقدر بوده است؟

$(E^\circ(Cu^{2+}Cu) = ۰/۳۴V$ و $E^\circ(Al^{3+}/Al) = -۱/۶۷V$ و $Al = ۲۷, Cu = ۶۴ : g \cdot mol^{-1})$

(۱) ۳۶ (۲) ۷۲ (۳) ۱۴ (۴) ۲۸

۸۸ - دو سلول گالوانی در اختیار داریم. سلول اول شامل نیم سلول های $Fe^{2+}(aq)/Fe(s)$ و $X^+(aq)/X(s)$ بوده و نیروی الکتروموتوری آن برابر ۰/۷۸ ولت است. سلول دوم شامل نیم سلول های $Y^{2+}(aq)/Y(s)$ و $Fe^{2+}(aq)/Fe(s)$ بوده و نیروی الکتروموتوری آن برابر ۰/۳۲ ولت است و آهن در این دو سلول به ترتیب قطب منفی و قطب مثبت محسوب می شود. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟ ($E^\circ(Fe^{2+}/Fe) = -۰/۴۴V$ و جرم مولی X و Y را به ترتیب ۶۴ و ۶۵ گرم بر مول در نظر بگیرید.)

(۱) تمایل فلز X برای اکسید شدن بیش تر از فلز Y است.

(۲) با فرض مبادلهٔ الکترون های برابر در دو سلول، نسبت اندازهٔ تغییر جرم X در سلول (۱) به تغییر جرم Y در سلول (۲) تقریباً برابر ۱ است.

(۳) در سلول گالوانی متشکل از دو فلز X و Y، emf سلول برابر $۱/۱۰V$ است.

(۴) می توان برای نگه داری محلول آهن (II) سولفات از ظرف هایی از جنس X و Y استفاده کرد.

۸۹ - در واکنش تیغهٔ روی با $۱۰۰ml$ محلول ۲ مولار مس (II) سولفات، با تشکیل ۳/۲ گرم فلز مس بر روی سطح تیغهٔ فلز روی، واکنش متوقف شده است. غلظت $[Cu^{2+}]$ در محلول موردنظر چند برابر غلظت $[Zn^{2+}]$ آن است؟ $(Zn = ۶۵, Cu = ۶۴ : g \cdot mol^{-1})$

(۱) ۳ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) ۳۰ (۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۹۰ - اگر واکنش های I و III انجام‌ناپذیر و واکنش II انجام‌پذیر باشد، چند مورد از مطالب زیر همواره درست است؟

$(I) M + MgCl_۲ \rightarrow Mg + MCl_۲$

$(II) ۲Al + ۳MCl_۲ \rightarrow ۲AlCl_۳ + ۳M$

$(III) ۲Ag + M(NO_۳)_۲ \rightarrow M + ۲AgNO_۳$

آ) فلز M دارای پتانسیل کاهشی منفی است.

ب) در سلول گالوانی تشکیل شده از نیم‌سلول‌های SHE و M، فلز M نقش آند خواهد داشت.

پ) فلز M در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از فلز آلومینیم است.

ت) در سلول‌های گالوانی، تشکیل شده از فلز M با فلزهای Al، Mg و Ag در دو سلول گالوانی، فلز M نقش کاتد دارد.

$E^\circ_{Mg^{۲+}/Mg} = -۲/۳۸V$, $E^\circ_{Al^{۳+}/Al} = -۱/۶۶V$, $E^\circ_{Ag^+/Ag} = ۰/۸V$

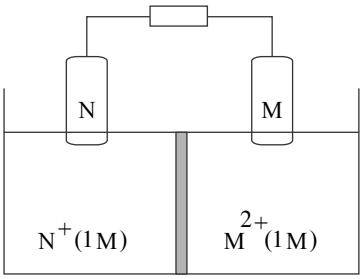
① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۹۱ - در آهن سفید پس از ایجاد خراش، ..... گونهٔ اکسنده بوده و تعداد الکترون‌های مبادله شده در آن برابر ..... است.

① $۴ - Fe$ ② $۴ - O_۲$ ③ $۲ - Fe$ ④ $۲ - O_۲$

۹۲ - شکل زیر سلولی گالوانی ($N - M$) را نشان می‌دهد. کدام گزینه نادرست است؟

$(E^\circ(M^{۲+}/M) = -۰/۳V, E^\circ(N^+/N) = -۰/۴۵V)$



① جهت حرکت الکترون‌ها با جهت حرکت کاتیون‌های N^+ از دیوارهٔ متخلخل یکسان است.

② در قطب منفی سلول، نیم‌واکنش $N \rightarrow N^+ + e^-$ انجام می‌شود و E° سلول برابر $۰/۱۵V$ است.

③ به‌تدریج به جرم تیغهٔ M افزوده می‌شود.

④ فلز الکترود M اکسنده‌تر از الکترود N است.

۹۳ - اگر در سلول گالوانی ($Mg - Ag$) اختلاف مقدار تغییر جرم آند و کاتد برابر ۲۸۸ گرم باشد، در این واکنش چند الکترون مبادله شده است؟ ($(Mg = ۲۴, Ag = ۱۰۸ : g \cdot mol^{-1}$

① $۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۳}$ ② $۱/۸۰۶ \times ۱۰^{۲۴}$ ③ $۴/۵۱۵ \times ۱۰^{۲۳}$ ④ $۳/۶۲ \times ۱۰^{۲۴}$

۹۴ - واکنش $۲M(s) + ۳A^{۲+}(aq) \rightarrow ۲M^{۳+}(aq) + ۳A(s)$ در جهت طبیعی خود انجام نمی‌شود. اگر فلز M در واکنش با محلول اسیدها گاز $H_۲$ تولید نماید، کدام گزینه نادرست است؟ (گاز هیدروژن باعث کاهش یون های $Pt^{۲+}$, $Cu^{۲+}$ و Ag^+ می شود.)

① واکنش $A(s) + ۲Ag^+(aq) \rightarrow A^{۲+}(aq) + ۲Ag(s)$ در جهت طبیعی انجام می شود.

② قدرت کاهندگی فلز M از قدرت کاهندگی لیتیم کمتر است.

③ کاتیون $A^{۲+}$ نمی تواند کاتیون $Cu^{۲+}$ یا $Pt^{۲+}$ باشد.

④ فلز M می تواند یکی از فلز های روی یا منیزیم باشد.

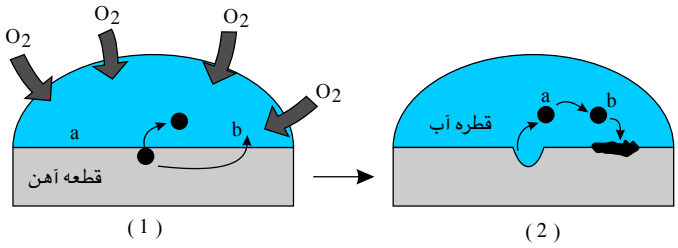
۹۵ - کدام گزینه نادرست است؟

① در فرایند صنعتی تولید سدیم در سلول دانز سدیم مایع در قطب مثبت و گاز کلر در قطب منفی سلول تولید می شوند.

② در تولید آلومینیم به روش هال اطراف الکترودی که به قطب مثبت منبع جریان برق متصل است، گاز $CO_۲$ تولید می شود.

③ در فرایند آبکاری یک قاشق فولادی با فلز نقره، الکترود آندی بی اثر نیست و در واکنش شرکت می کند.

④ در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، گاز هیدروژن و گاز اکسیژن به صورت کنترل شده و غیرمستقیم واکنش می دهند.



۹۶ - چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با شکل روبه‌رو درست است؟

آ) این شکل‌ها نشان می‌دهند که برای خوردگی آهن، وجود آهن ، آب و اکسیژن الزامی است.

ب) در شکل (۲) ذره‌های a و b با یون هیدروکسید به‌ترتیب رسوب‌های سبز و قرمز رنگ تشکیل می‌دهند.

پ) در شکل (۱) در محل a نیم‌واکنش: $Fe(s) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + ۲e^-$ صورت می‌گیرد.

ت) اگر به همراه مولکول‌های $O_۲$، مولکول‌های $SO_۳$ نیز حضور داشته باشند، سرعت و پیشرفت واکنش‌های صورت گرفته کاهش می‌یابد.

ث) در شکل (۱)، در محل b یون‌هایی تولید می‌شوند که رنگ کاغذ pH را آبی رنگ می‌کنند.

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۹۷ - برای تأمین سوخت در یک سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، از واکنش بخار آب با متان طبق واکنش زیر استفاده می‌شود. اگر بازده این واکنش ۶۴ درصد باشد و در این فرایند $۳۰kg$ متان مصرف شود، پس از وارد شدن سوخت تولید شده به آند سلول سوختی، ..... کیلوگرم اکسیژن در کاتد مصرف شده و ..... مول یون هیدرونیوم از غشا عبور می‌کند.

$(H = ۱, C = ۱۲, O = ۱۶ : g \cdot mol^{-۱})$

$CH_۴(g) + H_۲O(g) \rightarrow CO(g) + ۳H_۲(g)$

① ۳۶۰۰ _ ۲۸٫۸ ② ۷۲۰۰ _ ۲۸٫۸ ③ ۳۶۰۰ _ ۵۷٫۶ ④ ۷۲۰۰ _ ۵۷٫۶

۹۸ - در سلول گالوانی مس − نقره $(Cu - Ag)$، پس از عبور ۰٫۱ مول الکترون از الکترود ..... جرم محلول‌های محتوی الکترولیت‌ها ..... می‌یابد.

(فرض کنید تمام فلز تولیدشده بر روی تیغه‌ها می‌نشیند.) $(E^\circ(Cu^{۲+}/Cu) = +۰٫۳۴V, E^\circ(Ag^+/Ag) = +۰٫۸۰V)$

$(Cu = ۶۴, Ag = ۱۰۸ : g \cdot mol^{-۱})$

① مس به نقره - ۷٫۶ گرم کاهش ② نقره به مس - ۷٫۶ گرم افزایش ③ نقره به مس - ۱۵٫۲ گرم کاهش ④ مس به نقره - ۱۵٫۲ گرم افزایش

۹۹ - دانش‌آموزی نیم‌واکنش‌های انجام‌شده در نوعی سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن را به‌صورت زیر از منابع علمی معتبر استخراج کرده است، با توجه به این واکنش‌ها چند مورد از مطالب زیر درست است؟ $(H = ۱, O = ۱۶ : g \cdot mol^{-۱})$

$I)\ O_۲(g) + H^+(aq) + e^- \rightarrow H_۲O(l) \quad E^\circ = +۱٫۲V$

$II)\ H_۲(g) \rightarrow H^+(aq) + e^- \quad E^\circ = ۰٫۰V$

- نیم‌واکنش (I) نیم‌واکنش آندی و نیم‌واکنش (II) نیم‌واکنش کاتدی می‌باشد.
- اگر emf سلول توسط ولت‌سنج ۰٫۷۲ ولت نشان داده شود، بازدهٔ سلول ۶۰% است.
- اگر ۱۶٫۸ لیتر گاز هیدروژن در شرایط STP وارد این سلول شود و بازدهٔ واکنش برابر با ۱۰۰% باشد، ۱۳٫۵ گرم آب به‌دست می‌آید.
- جهت حرکت یون‌های هیدرونیوم در غشا با جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی همسو است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۰۰ - اگر در سلول گالوانی استاندارد آلومینیم - هیدروژن، حجم محلول الکترولیت‌ها برابر ۳ لیتر باشد، با کاهش ۸٫۱ گرم از جرم الکترود آلومینیم، pH نیم‌سلول هیدروژن به چه عددی می‌رسد؟ $(Al = ۲۷g \cdot mol^{-۱})$

① ۱٫۶ ② ۱ ③ ۰٫۸۵ ④ ۰٫۱۵

۱۰۱ - کدام مطلب دربارهٔ سلول گالوانی و سلول الکترولیتی درست است؟

(۱) در سلول گالوانی، الکترود آند، قطب مثبت است.

(۲) در سلول الکترولیتی، قطب منفی و در سلول گالوانی، آند محل تشکیل اتم از یون است.

(۳) در سلول الکترولیتی، در قطب منفی، اکسایش انجام‌شده و از جرم تیغهٔ فلزی کاسته می‌شود.

(۴) در سلول گالوانی، قطب منفی آند و در سلول الکترولیتی قطب مثبت آند، است و در هر سلول، کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند.

۱۰۲ - دربارهٔ سلول گالوانی «سرب - پلاتین»، چند مورد از مطالب زیر، درست است؟

$E^\circ[Pb^{2+}(aq)/Pb(s)] = -0/13V \ , E^\circ[Pt^{2+}(aq)/Pt(s)] = +1/20V$

- E° سلول برابر $+1/07$ ولت است و در واکنش کلی سلول، سرب نقش کاهنده را دارد.
- قدرت اکسندگی Pt^{2+} از Pb^{2+} بیشتر است و سطح تیغه در آند، دارای بار منفی می‌شود.
- الکترود سرب، آند است و با انجام واکنش در سلول، غلظت کاتیون در بخش آندی کاهش می‌یابد.
- با پیشرفت واکنش سلول به میزان ۲۵٪، $3/01 \times 10^{23}$ الکترون میان دو الکترود مبادله می‌شود.
- الکترون‌ها، با گذر از دیوارهٔ متخلخل بین دو محلول، از قطب منفی به قطب مثبت رفته، سبب کاهش $Pt^{2+}(aq)$ می‌شوند.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰۳ - با توجه به واکنش‌های اکسایش - کاهش نوشته شده، چه تعداد از عبارات داده شده درست است؟

۱) $A^{2+}(aq) + B(s) \rightarrow B^{2+}(aq) + A(s)$

۲) $D^{2+}(aq) + A(s) \rightarrow$ واکنش نمی دهد

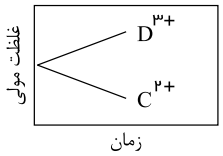
۳) $C(s) + A^{2+}(aq) \rightarrow$ واکنش نمی‌دهد

۴) $D^{2+}(aq) + B(s) \rightarrow B^{2+}(aq) + D(s)$

آ) بیشترین emf مربوط به سلول $B - C$ است.

ب) کمترین emf مربوط به سلول $A - D$ است.

پ) نمودار مربوط به تغییر غلظت یون‌ها در سلول گالوانی $C - D$ به‌صورت زیر است:



ت) مقایسهٔ قدرت اکسندگی گونه‌ها به‌صورت $B > D > A > C$ است.

ث) در بین گونه‌های داده شده، B^{2+} تمایل کمتری به گرفتن الکترون دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۴ - کدام گزینه نادرست است؟

(۱) میزان خوردگی آهن درمحیط اسیدی، بیشتر است.

(۲) در مولکول C_2H_5OH، عدد اکسایش کربن متصل به گروه عاملی بیش از دیگر کربن‌ها است.

(۳) در واکنش اکسایش - کاهش $Cr^{x+}(aq) + Sn^{2+}(aq) \rightarrow Cr^{y+}(aq) + Sn(s)$ به‌جای x و y به‌ترتیب ۳ و ۲ قرار می‌گیرد.

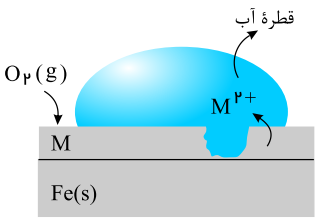
(۴) با توجه به واکنش: $Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$ که در باتری‌های روی - نقره انجام می‌شود، می‌توان گفت که در این واکنش، فلز روی کاهنده و یون نقره اکسنده است.

۱۰۵- برای حل کردن رسوب زنگ آهن، تشکیل شده به ازای مبادلهٔ $۱٫۲۰۴ \times ۱۰^{۲۰}$ الکترون در فرایند خوردگی آهن، ۱۰۰میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید معروف شده است. pHمحلول اسید کدام است؟

$Fe(s) + H_۲O(l) + O_۲(g) \rightarrow Fe(OH)_۳(s) \quad , (\log ۲ = ۰٫۳)$

① ۲٫۲ ② ۲٫۵ ③ ۲٫۷ ④ ۳٫۷

۱۰۶- با توجه به شکل مقابل، چه تعداد از موارد زیر درست می‌باشند؟آ) شکل مربوط به حلبی می‌باشد.



ب) از این نوع آهن، تانکر آب و کانال کولر ساخته می‌شود.

پ) نیم‌واکنش کاهش آن: $O_۲(g) + ۲H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۴OH^-$ می‌باشد.

ت) فلز آهن از فلز M به‌کار رفته کاهنده‌تر بوده است.

ث) از این نوع آهن نمی‌توان برای ساختن ظروف بسته‌بندی مواد غذایی استفاده کرد.

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۱۰۷- اگر تیغه‌ای از جنس Al را درون محلول روی نیترات قرار دهیم و $۳٫۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون بین آن‌ها مبادله گردد و با فرض اینکه تنها $\frac{۳}{۴}$ از فلز تولید شده بر روی تیغه قرار گیرد، جرم تیغه چگونه تغییر می‌کند؟ $(Al = ۲۷, Zn = ۶۵ : g/mol)$

① $۷٫۶۸g$ کاهش می‌یابد. ② $۷٫۶۸g$ افزایش می‌یابد. ③ $۱۲٫۱۸g$ افزایش می‌یابد. ④ $۱۲٫۱۸g$ کاهش می‌یابد.

۱۰۸- چند مورد از عبارت‌های زیر دربارهٔ فرآیند هال، نادرست است؟

• جنس آند و کاتد به کار رفته در سلول متفاوت است.

• در آند، فلز آلومینیم مذاب تولید می‌شود.

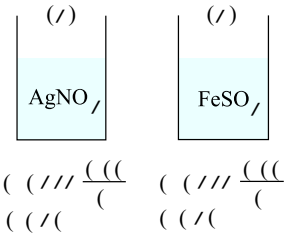
• با گذشت زمان از جرم تیغهٔ آند کاسته می‌شود.

• به علت مصرف مقدار زیاد انرژی الکتریکی، هزینهٔ بالایی دارد.

• چگالی آلومینیم مذاب بیشتر از چگالی الکترولیت موجود در سلول است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۰۹- اگر تیغه‌ای از جنس روی (Zn) به جرم ۷۸ گرم را وارد ظرف (۱) و سپس بعد از گذشت زمانی نسبتاً طولانی وارد ظرف (۲) کنیم، چه پدیده‌ای رخ می‌دهد؟ حجم محلول‌های هر ظرف را یک لیتر در نظر بگیرید. رسوب‌های ایجاد شده، طی واکنش‌های اکسایش - کاهش، روی تیغه نمی‌نشینند ($Ag = ۱۰۸ , Fe = ۵۶ , Zn = ۶۵ : g \cdot mol^{-۱}$)



① پس از وارد کردن تیغه در ظرف (۱)، همهٔ آن مصرف می‌شود.

② در انتها، جرم تیغه به ۱٫۶ درصد اولیهٔ خود می‌رسد.

③ بعد از بیرون آوردن تیغه روی از ظرف (۱)، تنها ۷۱٫۵ گرم از آن باقی می‌ماند.

④ غلظت Ag^+ در ظرف (۱) به صفر می‌رسد و در نهایت تیغه روی به‌طور کامل مصرف می‌شود.

۱۱۰- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

آ) تغییر عدد اکسایش اتم کربن در سوختن کامل متان ۸ واحد می‌باشد.

ب) اغلب فلزها در واکنش با نافلزها الکترون از دست داده و کاهش می‌یابند و به کاتیون تبدیل می‌شوند.

پ) واکنش $۲KOH + K_۲Cr_۲O_۷ \rightarrow ۲K_۲CrO_۴ + H_۲O$ از نوع اکسایش ـ کاهش می‌باشد.

ت) در واکنش $۴Fe(s) + ۳O_۲(g) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۴Fe(OH)_۳(s)$، مجموعاً ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود.

ث) نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش به‌طور همزمان روی می‌دهند و باید از لحاظ جرم و بار الکتریکی موازنه باشند.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x-2\underbrace{|x|}_{-}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=1$. پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{5x}=\frac{a}{5}=-1\to a=-5$$

$$\lim_{x\to3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}\times\frac{3x+\sqrt{4x^2+15x}}{3x+\sqrt{4x^2+15x}}=\lim_{x\to3}\frac{(-5x+15)(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{\underbrace{9x^2-4x^2-15x}_{5x^2-15x}}=\lim_{x\to3}\frac{-5(x-3)(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{5x(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-(3x+\sqrt{4x^2+15x})}{x}=\frac{-(9+9)}{3}=-6$$

البته حد را می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to3}\frac{-5}{3-\frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}}=\frac{-5}{3-\frac{39}{18}}=\frac{-5}{\frac{15}{18}}=-6$$

۲ ـ گزینه ۱ می‌دانیم $(f(g(x)))'=g'(x)\cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(2)=6\to g'(2)\cdot f'(g(2))=6$$

توجه کنید:
$$\begin{cases}g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\to g(2)=\dfrac{4+1}{2-1}=5\\ g(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}\to g'(x)=\dfrac{2(x-1)-1(2x+1)}{(x-1)^2}\to g'(2)=-3\end{cases}$$

$$g'(2)\cdot f'(g(2))=6\to -3f'(5)=6\to f'(5)=-2$$

۳ ـ گزینه ۴ فرض کنیم k نقطه‌ای با طول صحیح باشد، لذا داریم:

$$x\to k^+:x>k\Rightarrow\begin{cases}[x]=k\\ -x<-k\Rightarrow[-x]=-k-1\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to k^+}(4[x]+3[-x])=4k+3(-k-1)=k-3$$

$$x\to k^-:x<k\Rightarrow\begin{cases}[x]=k-1\\ -x>-k\Rightarrow[-x]=-k\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to k^-}(4[x]+3[-x])=4(k-1)+3(-k)=k-4$$

حد چپ دو برابر حد راست تابع است، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$k-4=2(k-3)\Rightarrow k=2$$

۴ ـ گزینه ۴ می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-10}{x-2}=3$، حال باید ببینیم که کسر $\frac{3x-10}{x-2}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، که برای این کار باید ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{3x-10}{x-2}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{3x-6-4}{x-2}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{3(x-2)}{x-2}+\frac{-4}{x-2}]=\lim_{x\to+\infty}[3+\frac{-4}{x-2}]=[3+\frac{-4}{+\infty}]=[3+0^-]=[3^-]=2$$

۵ ـ گزینه ۱

$$x-\frac{1}{4}=t\to x=\frac{1}{4}+t,t\to0$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{2+2\cos 4\pi(\frac{1}{4}+t)}{(4(\frac{1}{4}+t)-1)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2+2\cos(\pi+4\pi t)}{16t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2-2\cos 4\pi t}{16t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2(1-\cos 4\pi t)}{16t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\times 2\sin^2 2\pi t}{16t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}\times 2\pi t)^2}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1\times 2\pi t)^2}{4t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi^2 t^2}{4t^2}=\pi^2$$

۶ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$ و $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که این عبارت مشتق حاصل ضرب دو جمله است. لذا داریم:

$$2ff'g+g'f^2=(f^2g)'$$

$$f^2g=\frac{x}{\cancel{(x+\sin x)^2}}\times\frac{\cancel{x^2+\sin^2 x+2x\sin x}}{x+1}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow(f^2g)'=\frac{1}{(x+1)^2}\xrightarrow{x=1}\frac{1}{4}$$

۷ ـ گزینه ۲ روش هوپیتال: اگر تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ باشد آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

با توجه به تفکیک کسر $\frac{(1-x)^{1397}}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{1398})}=\frac{1-x}{1-x^2}\times\frac{1-x}{1-x^3}\times\cdots\times\frac{1-x}{1-x^{1398}}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{1397}}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{1398})}=\lim_{x\to 1}(\frac{1-x}{1-x^2}\times\frac{1-x}{1-x^3}\times\cdots\times\frac{1-x}{1-x^{1398}})$$

$$=[\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}]\times[\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^3}]\times\cdots\times[\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^{1398}}]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}\times\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)}\times\cdots\times\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{1397})}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{1398}=\frac{1}{1398!}$$

۸ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}}{\sin x}\times\frac{\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-1-\sin x}{\sin x(\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x}{2\sin x}=-1$$

۹ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: از هم‌ارزی مثلثاتی داریم: $\lim_{u\to 0}1-\cos u\simeq\frac{u^2}{2}$

در صورت کسر از هم‌ارزی مثلثاتی استفاده می‌کنیم و مخرج را در مزدوج آن ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 3x-1}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2})(1-\frac{9x^2}{2})-1}{\frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9x^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}x^4}{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}+2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^2+\frac{9}{4}x^4}{\frac{x^2}{4}}\overset{\text{هم ارزی کم توان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{-5x^2}{\frac{x^2}{4}}=-20$$

توجه: هم‌ارزی کم توان در صورتی استفاده می‌شود که همه ی جملات صفر شوند و سپس جملاتی که توان کمتری دارند نوشته می‌شوند.

۱۰ - گزینه ۴ دامنه‌ی تابع برابر $D_f = (-\infty, ۰) \cup [\sqrt{۱۰}, +\infty)$ می‌باشد، برای محاسبه مجانب قائم ریشه‌های مخرج را بررسی می‌کنیم:

$$y = \sqrt{\frac{x^۳ - ۱۰}{x(x-۲)^۲}} : x(x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = ۰ \text{ مجانب قائم} \\ x = ۲ \text{ جزء دامنه نیست} \end{cases}$$

از طرفی $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = ۱$ ، لذا $y = ۱$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

۱۱ - گزینه ۱

ضابطه‌ی تابع y را ساده می کنیم. لذا داریم:

$$y = (۴x - ۳\pi)[\sqrt{۲}(\sin x + \cos x)] = ۴(x - \frac{۳\pi}{۴})[۲\sin(x + \frac{\pi}{۴})]$$

تابع y در نقاطی که عبارت داخل براکت عددی صحیح شود، ناپیوسته می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$-۱ \le \sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le ۱ \to -۲ \le ۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) \le ۲$$

$$۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۲ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}$$

$$۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow x = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} \ , \ x + \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۶} \to x = \frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} < ۰ \text{ غ ق ق}$$

$$۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = ۰ \Rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = \pi \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۴} \ , \ x + \frac{\pi}{۴} = ۲\pi \to x = ۲\pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۷\pi}{۴}$$

$$۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = -۱ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = -\frac{۱}{۲} = \sin\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} \ , \ x + \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۱\pi}{۶} \to x = \frac{۱۱\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۹\pi}{۱۲}$$

$$۲\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = -۲ \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = -۱ \Rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}$$

حال از آنجا که $(x - \frac{۳\pi}{۴})$ ضریب عبارت براکت است، لذا تابع در نقطه‌ی $x = \frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته بوده و در مجموع ۶ نقطه‌ی ناپیوسته دارد.

$$\{\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۷\pi}{۴}, \frac{۱۱\pi}{۴}, \frac{۱۹\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۴}\}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$y^۲ = \frac{\cos^۲ x}{\sin ۲x} \Rightarrow y^۲ \sin ۲x = \cos^۲ x$$

حال از طرفین تساوی مشتق می‌گیریم:

$$۲yy' \sin ۲x + ۲\cos ۲x y^۲ = -۲\sin x \cos x$$

$$yy' \sin ۲x + y^۲ \cos ۲x = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$x = \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \text{سمت راست} = -\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۴}$$

۱۳ - گزینه ۱ ابتدا نقطه $x = ۰$ را در معادله قرار می‌دهیم تا عرض نقطه به‌دست آید. لذا داریم:

$$f^۲(x) + f(x^۲) = ۳x^۲ + ۳۶x + ۱۲ \xrightarrow{x=۰} f^۲(۰) + f(۰) = ۱۲ \Rightarrow f^۲(۰) + f(۰) - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (f(۰) + ۴)(f(۰) - ۳) = ۰ \xrightarrow{f(۰) > ۰} f(۰) = ۳$$

حال با مشتق گیری از معادله خواهیم داشت:

$$f^{۲}(x)+f(x^{۲})=۳x^{۲}+۳۶x+۱ \Rightarrow ۲f(x)f'(x)+۲xf'(x^{۲})=۶x+۳۶$$

$$\xrightarrow{x=۰} ۲f(۰)f'(۰)+۰=۶(۰)+۳۶ \Rightarrow ۲f(۰)f'(۰)=۳۶ \Rightarrow f'(۰)=\frac{۱۸}{f(۰)}=\frac{۱۸}{۳}=۶ \Rightarrow f'(۰)=۶$$

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند آنگاه:

$$ax^{۲}+bx+c=a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$$

از آن‌جاکه $۰ \le x < ۱ : [x]=۰$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}+[x]}{۴x^{۲}-۳x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|+۰}{(x-۱)(۴x+۱)}$$

$$\xrightarrow{x<۱\Rightarrow(x-۱)<۰} \lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)}{(x-۱)(۴x+۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-۱}{۴x+۱}=-\frac{۱}{۵}=-۰/۲$$

۱۵ - گزینه ۱ روش اول:

$$x-\frac{۱}{۲}=t \to x=t+\frac{۱}{۲} \to \lim_{t\to ۰^+}\frac{-\cos\pi(t+\frac{۱}{۲})}{۱-\sqrt{۲(t+\frac{۱}{۲})}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\cos(\frac{\pi}{۲}+\pi t)}{۱-\sqrt{۲t+۱}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin\pi t}{۱-\sqrt{۲t+۱}}\times\frac{۱+\sqrt{۲t+۱}}{۱+\sqrt{۲t+۱}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin\pi t(۱+\sqrt{۲t+۱})}{۱-۲t-۱}$$

$$=\frac{\pi t(۲)}{-۲t}=-\pi$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=۰$ و هردو در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه روش هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ به قرار زیر است:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{۰}{۰} \qquad H:\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

نکته:در محاسبه‌ی حد، هرگاه x به سمت ریشه‌ی ساده قدر مطلق میل کرد، ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت و سپس حاصل حد را می‌یابیم.

$$x\to(\frac{۱}{۲})^+ : x>\frac{۱}{۲} \Rightarrow \pi x>\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \text{ربع دوم } \pi x \Rightarrow \cos\pi x<۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{|\cos\pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-\cos\pi x}{۱-\sqrt{۲x}}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{\pi\sin\pi x}{-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}}=-\pi$$

۱۶ - گزینه ۴ حد چپ و حد راست تابع f در $x=a$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}(x^{۲}-۵x)=a^{۲}-۵a$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}[x]-۴=[a^-]-۴=a-۱-۴=a-۵$$

بنابراین طبق رابطهٔ داده شده داریم:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)=-۴ \Rightarrow a^{۲}-۵a-(a-۵)=-۴ \Rightarrow a^{۲}-۵a-a+۵=-۴ \Rightarrow a^{۲}-۶a+۹=۰ \Rightarrow (a-۳)^{۲}=۰ \Rightarrow a=۳$$

$$f(x)=\begin{cases}[x]-۴ & , \quad x<۳\\ x^{۲}-۵x & , \quad x\ge ۳\end{cases} \Rightarrow f(-\frac{a}{۲})=f(-\frac{۳}{۲})=[-\frac{۳}{۲}]-۴=-۲-۴=-۶$$

۱۷ - گزینه ۲ y' و y'' را محاسبه می‌کنیم:

$y = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱ \Rightarrow y' = ۱۲x^۳ + ۴x \Rightarrow y'' = ۳۶x^۲ + ۴$

پس ضابطهٔ تابع f چنین است:

$f(x) = a(۱۲x^۳ + ۴x) - x(۳۶x^۲ + ۴)$

$\Rightarrow f(x) = ۱۲ax^۳ + ۴ax - ۳۶x^۳ - ۴x \Rightarrow f(x) = (۱۲a - ۳۶)x^۳ + (۴a - ۴)x$

می‌دانیم ضابطهٔ تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ است؛ پس اگر f تابعی خطی باشد، باید ضریب جمله $x^۲$ صفر باشد. در این صورت:

$۱۲a - ۳۶ = ۰ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow f(x) = ۸x \Rightarrow f(۲) = ۱۶$

۱۸ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt[۳]{x-۲} - ۱}{x^۲ - ۹} \times \frac{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{x-۲} + ۱}{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{x-۲} + ۱}$$

$$= \lim_{x\to ۳} \frac{x - ۲ - ۱}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{x-۲} + ۱)} = \lim_{x\to ۳} \frac{۱}{(x+۳)(\sqrt[۳]{(x-۲)^۲} + \sqrt[۳]{x-۲} + ۱)}$$

$$= \frac{۱}{۶ \times (۱ + ۱ + ۱)} = \frac{۱}{۱۸}$$

۱۹ ـ گزینه ۱

$f(۰) = a + ۱$ مقدار تابع

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \cos ۲x}}{\sqrt{۲}\sin x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{\sqrt{۲}\sin x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲}|\sin x|}{\sqrt{۲}\sin x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۲}\sin x} = -۱$$ حد چپ

$$\lim_{x\to ۰^+} [\cot \frac{\pi}{x+۴}] + b = [\cot \frac{\pi}{۰^+ + ۴}] + b\ [\cot \frac{\pi}{۴^+}] + b = [\cot(\frac{\pi}{۴})^-] + b = [۱^+] + b = ۱ + b$$ حد راست

توجه: تابع کتانژانت با کمان نسبت عکس دارد.

چون پیوستگی در $x = ۰$ دارد، پس حد چپ و حد راست و مقدار تابع برابر است.

$$a + ۱ = -۱ = ۱ + b \Rightarrow \begin{matrix} a = -۲ \\ b = -۲ \end{matrix} \Rightarrow a + b = -۴$$

۲۰ ـ گزینه ۴ اگر فرض کنیم $x = \frac{\pi}{۴} + t$ آن‌گاه $t \to ۰^-$ و

$\cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲t) = -\sin t$

$\cos ۶x = \cos(\frac{۳\pi}{۲} + ۶t) = \sin ۶t$

$\pi - ۴x = \pi - ۴(\frac{\pi}{۴} + t) = -۴t$

بنابراین حد موردنظر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{t\to ۰^-} \frac{\sqrt{-\sin ۲t} - \sqrt{-\sin ۶t}}{\sqrt{-۴t}} = \lim_{t\to ۰^-} \frac{۱}{۲}(\sqrt{\frac{\sin ۲t}{t}} - \sqrt{\frac{\sin ۶t}{t}}) = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲} - \sqrt{۶})$$

۲۱ ـ گزینه ۱

دو خط موازی هستند پس مرکز دایره روی خط بین آنها یعنی $y = x + ۲$ قرار دارد وفاصله بین دو خط برابر قطر می‌باشد.

$O \in y = x + ۲ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow B = ۱ \Rightarrow O|_۱^{-۱}$

$۲R = \frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow R = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$

$C : (x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$

۲۲ ـ گزینه ۴

$x^۲ + y^۲ + ۴x + ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow C(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (-۲, -۱)$

$R^۲ = \alpha^۲ + \beta^۲ - c \to R^۲ = ۴ + ۱ + ۴ = ۹ \to R = ۳$

شرط مماس خارج : $CC' = R + R' \to \sqrt{(-۲-۱)^۲ + (-۱-۳)^۲} = ۳ + R'$

$\rightarrow \sqrt{۹+۱۶} = ۳ + R' \rightarrow ۵ = ۳ + R' \rightarrow R' = ۲$

حال با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادله دایره را می‌نویسیم.

$C'\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right. \quad , \quad R' = ۲ \Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$

$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ - ۶y + ۹ = ۴ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۶ = ۰$

۲۳ - گزینه ۳ نقطه $(۲,۱)$ مرکز و $\sqrt{۲۰}$ شعاع دایره است می دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز برابر شعاع است پس باید با امتحان کردن گزینه ها نقطه ای را پیدا کنیم که روی دایره قرار دارد

۱) $۳^۲ + (-۴)^۲ - ۴ \times (۳) - ۲ \times (-۴) - ۱۵ \neq ۰$ نادرست

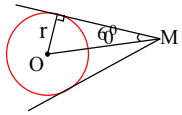
۲) $۲^۲ + ۵^۲ - ۴ \times (۲) - ۲ \times (۵) - ۱۵ \neq ۰$ نادرست

۳) $(-۲)^۲ + ۳^۲ - ۴ \times (-۲) - ۲ \times (۳) - ۱۵ = ۰$ درست

۴) $۱^۲ + ۵^۲ - ۴ \times (۱) - ۲ \times (۵) - ۱۵ \neq ۰$ نادرست

۲۴ - گزینه ۱

زاویه رؤیت یک دایره از یک نقطه در حقیقت همان زاویه بین مماس‌های رسم شده از آن نقطه بر دایره است.



$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶} = \sqrt{۱۲}, O : (-۲,۲)$

$\sin ۶۰ = \frac{r}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{OM} \Rightarrow OM = ۴$

مکان مطلوب دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ می‌باشد.

$\Rightarrow (x+۲)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱۶$

۲۵ - گزینه ۱ مرکز دایره ها به ترتیب $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ می باشند یعنی مرکزها هم عرض اند پس در صورتی مماس مشترک خارجی موازی محور y ها (یعنی عمود بر خط المرکزین) است که دو دایره مماس داخل باشند.

$d = |R - R'|$

$\begin{cases} d = OO' = ۱ \\ R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴} = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ = |R - ۱|$

$۱ = R - ۱ \Rightarrow R = ۲$ ق ق

$۱ = ۱ - R \Rightarrow R = ۰$ شعاع نمی تواند صفر باشد

$R = ۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴c} \Rightarrow ۴ = \sqrt{۴c} \Rightarrow ۱b = ۴c \Rightarrow c = ۴$

۲۶ - گزینه ۳ ۱-مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R,R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,R)$ است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R,-R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R,-R)$ است.

که R شعاع دایره است.

چون دایره در ناحیه دوم بر محورهای مختصات عمود است پس مرکز آن $C\left|\begin{matrix}-R\\R\end{matrix}\right.$ است. دقت کنید عمود بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مرکز دایره را در خط داده شده صدق می‌دهیم.

$C\left|\begin{matrix}-R\\R\end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{صدق}]{۲x+۳y-۳=۰} -۲R + ۳R - ۳ = ۰ \Rightarrow R = ۳$

$C\left|\begin{matrix}-۳\\۳\end{matrix}\right. \quad , \quad R = ۳ \Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x+۳)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$

$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ + y^۲ - ۶y + ۹ = ۹ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۶x - ۶y + ۹ = ۰$

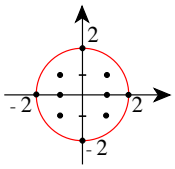
۲۷ - گزینه ۴ معادله نیم‌ساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است پس هر نقطه روی آن به‌صورت $A\left|\begin{matrix}\alpha\\-\alpha\end{matrix}\right.$ است این نقطه را در معادله دایره صدق داده و عدد حاصل را P می‌نامیم و دقت کنید طول مماس $\sqrt{P}$ است.

$$\text{طول مماس} = \sqrt{c(\alpha,-\alpha)} = \sqrt{(\alpha-۱)^۲ + (-\alpha+۳)^۲ - ۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{(\alpha-۱)^۲ + (-\alpha+۳)^۲ - ۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۸ = \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ + \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ - ۲ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۸\alpha = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \\ \alpha = ۴ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۴\\-۴\end{matrix}\right. \end{cases}$$

۲۸ - گزینه ۱ دایره را رسم می کنیم.

$$(x-۰)^۲ + (y-۰)^۲ = ۴ \Rightarrow C\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \ , \ R = ۲$$



بنابراین ۹ نقطه با مختصات صحیح درون دایره قرار دارند.

۲۹ - گزینه ۱ معادلهٔ استاندارد دایره چنین است:

$$(x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ = ۱۳$$

فاصلهٔ مرکز دایره $(۲,-۳)$ از خط مماس $۲x - ۳y + m - ۲ = ۰$ برابر شعاع دایره است.

$$\left|\frac{۴+۹+m-۲}{\sqrt{۱۳}}\right| = \sqrt{۱۳} \Rightarrow ۱۱ + m = \pm ۱۳ \Rightarrow m = ۲\ ,\ -۲۴$$

۳۰ - گزینه ۱ صورت استاندارد از دایره را می‌نویسیم $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$

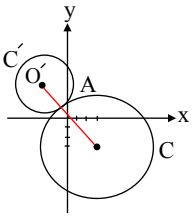
مرکز دایره $(۲,-۱)$ و شعاع آن $R = ۳$ است. می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس $۲x - y + ۳m - ۲ = ۰$ برابر شعاع دایره است.

$$\frac{|۴+۱+۳m-۲|}{\sqrt{۱+۴}} = ۳ \Rightarrow |m+۱| = \sqrt{۵} \Rightarrow m = -۱ \pm \sqrt{۵}$$

۳۱ - گزینه ۱ فرض کنیم $A(۰,۱)$ نقطه تماس دو دایره باشد چون قائم‌های بر دایره از مرکز آن می‌گذرند پس نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ مرکز دایره‌ی C می‌باشد. از طرفی می‌دانیم خط‌المرکزین دو دایره‌ی مماس از نقطه‌ی تماس آنها می‌گذرد. بنابراین مرکز دایره‌ی C' روی خط OA قرار دارد.

$$m_{OA} = \frac{-۳-۱}{۲-۰} = -۲ \Rightarrow OA \text{ خط} \ : y - ۱ = -۲(x-۰) \Rightarrow y + ۲x = ۱$$

پس مرکز دایره‌ی C' روی خط $y + ۲x = ۱$ قرار دارد. در بین گزینه‌ها فقط نقاط $(-۱, ۳)$ و $(۱, -۱)$ در این خط صدق می‌کند.
ولی مطابق شکل مرکز دایره‌ی C' در ناحیه‌ی دوم قرار دارد پس طول مرکز دایره‌ی C' منفی می‌باشد بنابراین $(-۱, ۳)$ درست است.



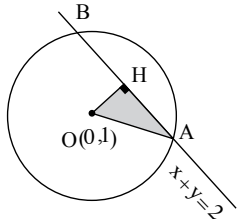
۳۲ - گزینه ۳ ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد درمی‌آوریم.

$$۴x^۲ + ۲۴x + ۴y^۲ - ۸y = -۲ \Rightarrow ۴(x^۲ + ۶x + ۹) + ۴(y^۲ - ۲y + ۱) = ۳۸$$

$$\Rightarrow ۴(x + ۳)^۲ + ۴(y - ۱)^۲ = ۳۸ \Rightarrow (x + ۳)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۹/۵ \Rightarrow O(-۳, ۱)\ ,\ R = \sqrt{۹/۵}$$

فاصله‌ی مرکز دایره از محورهای x و y به‌ترتیب برابر ۱ و ۳ است که هر دو از شعاع دایره کمتر می‌باشد. بنابراین دایره دو محور x و y را قطع می‌کند، یعنی در نواحل اول و سوم نیز علاوه بر ناحیه‌ی دوم قرار دارد. اما فاصله‌ی مرکز دایره از مبدأ مختصات، برابر $\sqrt{۱۰}$ است که بیشتر از شعاع دایره می‌باشد، پس دایره وارد ناحیه‌ی چهارم نمی‌شود.

۳۳ - گزینه ۳ عمودی که از مرکز دایره بر وتر AB رسم شده است آن را نصف می‌کند. بنابراین داریم:



$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow AH = \sqrt{۲}$$

فاصلهٔ مرکز (O) از خط $x + y = ۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$OH = \frac{|۰ + ۱ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OHA اندازهٔ شعاع دایرهٔ (OA) را به‌دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{OHA} : OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \rightarrow (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = OA^۲$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲} + ۲ = OA^۲ \rightarrow \frac{۵}{۲} = OA^۲ \rightarrow OA = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

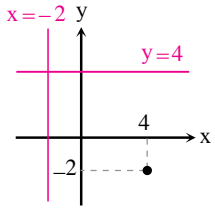
$$(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = (\frac{\sqrt{۱۰}}{۲})^۲$$

$$\rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱ = \frac{۱۰}{۴} \rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y + (۱ - \frac{۱۰}{۴}) = ۰$$

$$\rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲y - \frac{۳}{۲} = ۰ \rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ b = -۲ \\ c = -\frac{۳}{۲} \end{cases} \rightarrow a - b + c = ۰ + ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۴ - ۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۳۴ - گزینه ۲ فرض کنیم $(\alpha\ ,\ \beta)$ مرکز دوایر موردنظر باشد، آن‌گاه باید $|\alpha + ۲| = ۶$ و $|\beta - ۴| = ۶$ باشد یعنی $\alpha = ۴$ یا -۸ و $\beta = ۱۰\ ,\ -۲$ در حقیقت چهار دایره با شرایط تست وجود دارد. در شکل یکی از مراکز را می‌بینید.

$(۴, ۱۰), (۴, -۲), (-۸, ۱۰), (-۸, -۲)$

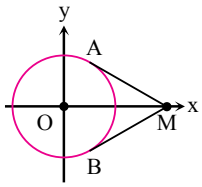


و مجموع طول و عرض آن‌ها برابر است با:

$۱۴ + ۲ + ۲ - ۱۰ = ۸$

۳۵ ـ گزینه ۱

فرض کنیم $A(x_۰, y_۰)$ نقطهٔ تماس باشد. نقطهٔ A در معادله صدق می‌کند، پس $A = (x_۰, \sqrt{۴ - x_۰^۲})$ داریم:



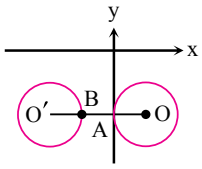
$MA = \sqrt{f(M)} = \sqrt{۱۶ + ۰ - ۴} = \sqrt{۱۲}$

$MA = \sqrt{(x_۰ - ۴)^۲ + ۴ - x_۰^۲} = \sqrt{x_۰^۲ + ۱۶ - ۸x_۰ + ۴ - x_۰^۲} = \sqrt{۲۰ - ۸x_۰}$

$\sqrt{۲۰ - ۸x_۰} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow ۸x_۰ = ۸ \Rightarrow x_۰ = ۱ \Rightarrow A = (۱, \sqrt{۳}), \ B = (۱, -\sqrt{۳})$

$|AB| = ۲\sqrt{۳}$

۳۶ ـ گزینه ۱ با توجه به شکل کم‌ترین طول AB برابر $d - (R + R')$ است.



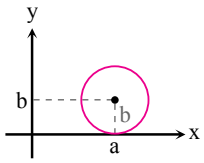
$\left.\begin{matrix} O(۱, -۲) \\ O'(-۲, -۲) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d = OO' = ۳$

$R = \dfrac{\sqrt{۴ + ۱۶ - ۱۶}}{۲} = ۱ \quad , \quad R' = ۱$

کم‌ترین فاصلهٔ $AB = d - (R + R') = ۳ - (۱ + ۱) = ۱$

۳۷ ـ گزینه ۲

اگر دایره‌ای بر محور yها مماس باشد باید معادله‌ی آن به صورت $(x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = \beta^۲$ که به صورت ضمنی به صورت $x^۲ + y^۲ - ۲\alpha x - ۲\beta y + \alpha^۲ = ۰$ می‌شود. در نتیجه داریم:



$\alpha^۲ = ۳۶ \Rightarrow \alpha = \pm ۶ \Rightarrow a = -۲\alpha = \pm ۱۲$

$a = ۱۲ \Rightarrow b = -۵ \Rightarrow a - b = ۱۷$

$a = -۱۲ \Rightarrow b = ۱۹ \Rightarrow a - b = -۳۱$

راه دوم: وقتی یک دایره بر محور xها مماس است که اگر در معادله‌ی ضمنی آن به‌جای y، صفر قرار دهیم. معادله‌ی به‌دست آمده فقط یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشد (یک خط وقتی بر یک دایره مماس است که فقط در یک نقطه آن را قطع کند)

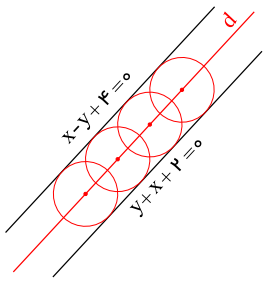
$x^۲ + ax + ۳۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - (۴)(۳۶) = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow a = \pm ۱۲$

از اینجا به بعد مانند راه‌حل قبل می‌توان حاصل را به‌دست آورد.

۳۸ ـ گزینه ۱

$\left.\begin{matrix} x - y + ۶ = ۰ \\ -x + y + ۲ = ۰ \end{matrix}\right\} \rightarrow \dfrac{۱}{-۱} = \dfrac{-۱}{۱} \neq \dfrac{۶}{۲} \rightarrow$ دو خط موازی‌اند.

مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس بر این دو خط موازی، خط وسط آن‌ها می‌باشد (خط d)



$$d : x - y + (\frac{۶-۲}{۲}) = ۰ \to x - y + ۲ = ۰$$

۳۹ ـ گزینه ۴ فرض کنیم خط قائم محور yها را در نقطه‌ای مانند B قطع کند. بنابراین:

$$x^۲ + y^۲ + mx + n = ۰ \to O(-\frac{m}{۲}, ۰) \quad , \quad B(۰, -۲)$$

$$m_{OA} = m_{AB} \to \frac{۲-۰}{۱+\frac{m}{۲}} = \frac{۲+۲}{۱-۰} \to \frac{۲}{۱+\frac{m}{۲}} = ۴ \to m = -۱$$

$$x^۲ + y^۲ - x + n = ۰ \xrightarrow{A(۱,۲)\text{ روی دایره}} ۱ + ۴ - ۱ + n = ۰ \to n = -۴ \to m + n = -۱ - ۴ = -۵$$

۴۰ ـ گزینه ۲ در معادلهٔ دایره، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر است، پس:

$$(k+۱) = \frac{۲}{k} \Rightarrow k^۲ + k - ۲ = ۰ \Rightarrow (k+۲)(k-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = -۲ \\ k = ۱ \end{cases}$$

دو معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{k=-۲} -x^۲ - y^۲ + ۴x - ۵y + ۶ = ۰ \xrightarrow{\div(-۱)} x^۲ + y^۲ - ۴x + ۵y - ۶ = ۰ \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{k=۱} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴x - ۲y + ۶ = ۰ \xrightarrow{\div(۲)} x^۲ + y^۲ + ۲x - y + ۳ = ۰ \quad (۲)$$

مقادیر $a^۲ + b^۲$ و $۴c$ را برای هر یک از دو معادلهٔ فوق مقایسه می‌کنیم:

$$(۱) \to \underbrace{(-۴)^۲ + ۵^۲}_{۴۱} > \underbrace{۴(-۶)}_{-۲۴} \Rightarrow \text{معادلهٔ یک دایره}$$

$$(۲) \to \underbrace{۲^۲ + (-۱)^۲}_{۵} > \underbrace{۴(۳)}_{۱۲} \Rightarrow \text{هیچ نقطه‌ای از صفحه را مشخص نمی‌کند}$$

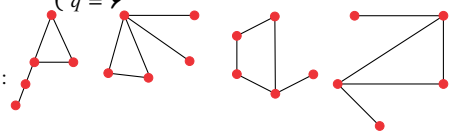
پس فقط معادلهٔ (۱) مربوط به دایره است و شعاع آن برابر است با:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$$

۴۱ ـ گزینه ۲ باید $q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$ باشد و در ضمن اگر $q \le p - ۲$ باشد گراف قطعاً ناهمبند است پس فقط ($q = ۶$ و $p = ۴$) و ($p = q = ۵$) قابل قبولند که در حالت اول چون گراف کامل می شود نادرست است. (زیرا گراف کامل k_p، $(p-۱)$–منتظم است) برای رسم گراف ها هم بر اساس تعداد دور، آنها را رسم می کنیم.

$$p + q = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} p = ۴ \\ q = ۶ \end{cases} \Rightarrow k_۴ \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

$$\begin{cases} p = ۵ \\ q = ۵ \end{cases} :$$



کلاً ۴ نوع وجود دارد.

۴۲ ـ گزینه ۱ اگر $\Delta = ۷$ باشد، پس $\delta \le ۷$ است. فرض کنید $\delta = ۷$ باشد آنگاه گراف ۷ ـ منتظم خواهد بود با ۴۰ یال! چنین گرافی نمی تواند وجود داشته باشد پس $\delta \le ۶$ خواهد بود. باید دید با ۴۰ یال و $\Delta = ۷$ و $\delta = ۶$ می‌توان گرافی رسم کرد که اگر ۱۱ رأس از درجهٔ ۶ و ۲ رأس از درجهٔ ۷ باشند امکان‌پذیر است.

۴۳ ـ گزینه ۱ گراف ۲– منتظم در واقع به صورت تعدادی چند ضلعی در کنار هم است و چون هر بخش حداقل ۳ رأس باید داشته باشد پس حالات (۹، ۱) و (۸، ۲) قابل قبول نیستند:

$۱۰ = ۹ + ۱ = ۸ + ۲ = ۷ + ۳ = ۵ + ۵ = ۶ + ۴ = ۴ + ۳ + ۳$

با توجه به تعداد بخش ها گراف ها را بررسی می کنیم.

۱۰ : تک بخشی

۵,۵ یا ۴,۶ یا ۳,۷ : دو بخشی

کلاً ۵ نوع گراف ۲ـمنتظم مرتبهٔ ۱۰ وجود دارد.

۳,۳,۴ : سه بخشی

۴۴ ـ گزینه ۲

مجموع درجات رأس های فرد را y و مجموع درجات رئوس زوج را x فرض می کنیم.

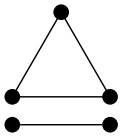
$$\begin{cases} x + y = ۲q \\ x = ۲۰ \\ q = ۱۵ \end{cases} \Longrightarrow y = ۱۰$$

پس مجموع درجات رأس های فرد ۱۰ است برای این که رأس فرد با بیشترین درجه را داشته باشیم باید ۲ رأس فرد با درجه های ۱ و ۹ فرض کنیم پس جواب همان ۹ می شود.

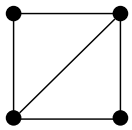
۴۵ ـ گزینه ۲ در گراف کامل از مرتبهٔ p تعداد یال‌ها $\frac{p(p-۱)}{۲}$ است. لذا رابطه $p \times \frac{p(p-۱)}{۲} = ۲۰$ یا $p^۲(p-۱) = ۴۰$ نشدنی است.

برای گزینه‌های دیگر مثال می‌آوریم:

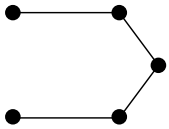
۱. ناهمبند: $p = ۵ \ , \ q = ۴$ ⟵



۳. همبند شامل دور: $p = ۴ \ , \ q = ۵$ ⟵



۴. همبند فاقد دور: $p = ۵ \ , \ q = ۴$ ⟵



۴۶ ـ گزینه ۱

این گراف $\frac{p}{۲}$ رأس درجه یک و $\frac{p}{۲}$ رأس نیز درجه ۳ دارد.

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q \Rightarrow \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{\frac{p}{۲}\ \text{تا}} + \underbrace{۳ + ۳ + \cdots + ۳}_{\frac{p}{۲}\ \text{تا}} = ۲q \Rightarrow \frac{p}{۲}(۱) + \frac{p}{۲}(۳) = ۲q \Rightarrow ۴\frac{p}{۲} = ۲q \Rightarrow p = q$$

۴۷ ـ گزینه ۲ طبق نامساوی مربوط به مینیمم درجه داریم:

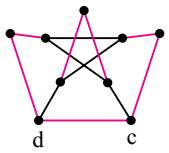
$$\delta \le \frac{۲q}{p} \Rightarrow \delta \le \frac{۲\delta}{p} \Rightarrow p \le ۲ \Rightarrow \begin{cases} p = ۱ \to q = ۰ \quad \text{غ} \\ p = ۲ \end{cases}$$

بنابراین گراف به صورت $a \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet b$ است و در نتیجه داریم:

$|N_G(a)| = ۱ \ , \ |N_G(b)| = ۱$

۴۸ ـ گزینه ۳

باید یکی از رئوس به همراه یال‌های مربوطه‌اش را از شبکه حذف کنیم (به ۱۰ طریق این کار شدنی است)



رئوسی که درجه ۲ دارند، هر دو یالشان در دور باید شرکت کنند:

در ادامه دو حالت پیش می‌آید، cd باشد و یا نه. بنابراین تعداد کل دورهای به طول ۹ در این گراف برابر است با:

$۱۰ \times ۲ = ۲۰$

۴۹ ـ گزینه ۱ گراف P_n دارای

۱ − n یال و گراف K_n دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است پس:

$$\left.\begin{array}{r} q-۸۲=n-۱ \\ q+۱۴۹=\frac{n(n-1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}-۱۴۹=(n-1)+۸۲ \xrightarrow{\times ۲} n^۲-n-۲۹۸=۲n+۱۶۲ \Rightarrow n^۲-۳n-۴۶۰=۰ \Rightarrow (n-۲۳)(n+۲۰)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۲۳ \\ n=-۲۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۵۰ - گزینه ۱ گراف $K_۷$ را در نظر بگیرید که $\frac{۷\times ۶}{۲}=۲۱$ یال دارد و درجهٔ همهٔ رئوس آن $۷-۱=۶$ است.

حال باید ۳ یال از این گراف برداریم که با توجه به اینکه ۲ رأس باید ۶ بماند، پس این ۳ یال از ۵ رأس دیگر به‌صورت باید برداشته شود. در واقع با این کار ۳ یال را از ۵ راس برداشته‌ایم.

در نتیجه ۲ رأس درجهٔ ۶، ۴ رأس درجهٔ ۵ و یک رأس درجهٔ ۴ خواهیم داشت که تنها رأس مینیمم درجه در گراف است.

۵۱ - گزینه ۳ نکته: بین گراف G و گراف مکمل آن روابط مقابل برقرار است:

$$q_G+q_{\bar{G}}=\binom{p}{۲}$$

$deg_G a+deg_{\bar{G}} a=p-۱$ (a یک رأس دلخواه است.)

$rp=۲q$ (r درجه هر رأس است.)

نکته: در هر گراف ۵− منتظم داریم:

$$deg_G a=۵ \Rightarrow deg_{\bar{G}} a=p-۱-۵=p-۶$$

گراف $\bar{G}$ هم منتظم است پس درجه همه‌ی رأس‌های آن برابر $p-۶$ است.

$$\Rightarrow \begin{cases} p=۸ \\ p=۳ \quad (p>r) \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \quad q_{\bar{G}}=q_G-۱۲ \Rightarrow \frac{(p-۶)p}{۲}=\frac{۵p}{۲}-۱۲ \xrightarrow{\times ۲} (p-۶)p=۵p-۲۴ \Rightarrow p^۲-۱۱p+۲۴=۰ \Rightarrow (p-۸)(p-۳)=۰$$

در نتیجه تعداد یال‌های گراف G برابر $q=\frac{۵\times ۸}{۲}=۲۰$ است.

۵۲ - گزینه ۳

- از مرتبهٔ ۱: $\binom{۴}{۱}=۴$
- از مرتبهٔ ۲: $\binom{۴}{۲}\times ۲^۱=۱۲$
- از مرتبهٔ ۳: $\binom{۴}{۳}\times ۲^۳=۳۲$
- از مرتبهٔ ۴: $\binom{۴}{۴}\times ۲^۶=۶۴$

بنابراین مجموع تعداد زیرگراف‌ها برابر است با:

$$۴+۱۲+۳۲+۶۴=۱۱۲$$

۵۳ - گزینه ۱ سه رأس وسط نباید c و d باشند، پس ۴ رأس از بین ۹ رأس را باید کنار بگذاریم. دو رأس که a و b است و دو رأس دیگر d و c. بنابراین برای پرکردن رأس‌های وسط به‌ترتیب با ۵، ۴ و ۳ انتخاب روبه‌رو هستیم:

$$a\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ b=۶۰$$

۵۴ - گزینه ۱ در مسیر $a\square\square\square b$ قرار است حتماً از e عبور کنیم. پس e یا در جایگاه دوم است، یا سوم و یا چهارم. اصولاً از c هم عبور نمی‌کنیم. کلاً ۹ رأس داشتیم که ۴ تای آن‌ها کنار رفتند. پس ۵ رأس دیگر باقی می‌ماند و در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\ e\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ b = ۲۰ \\ a\ \boxed{۵}\ e\ \boxed{۴}\ b = ۲۰ \\ a\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}\ e\ b = ۲۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۶۰$$

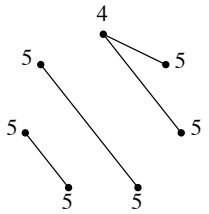
۵۵ - گزینه ۲ ابتدا حداقل δ را پیدا می‌کنیم. برای یافتن حداقل مقدار δ، یک رأس را کنار می‌گذاریم و از باقی رأس‌ها تا جایی که می‌توانیم یال می‌گذرانیم. به عبارت دیگر با بقیهٔ رئوس یک گراف کامل می‌سازیم. تعداد یال‌های باقی‌مانده، δ را به ما می دهد:

$$q(K_۶) = \frac{۶(۶-۱)}{۲} = ۱۵ \Rightarrow \delta_{min} = ۱۷ - ۱۵ = ۲$$

حالا می‌رویم سراغ پیدا کردن حداکثر مقدار δ. می‌خواهیم بدانیم این گراف از گراف کامل هم‌مرتبهٔ آن چند یال کمتر دارد تا به‌گونه‌ای این یال‌ها را از همهٔ رئوس برداریم که δ، حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد. می‌دانیم که:

$$q(K_۷) = \frac{۷(۷-۱)}{۲} = ۲۱ \quad , \quad ۲۱ - ۱۷ = ۴$$

اگر مطابق شکل ۴ یال را ا ز تعداد رأس بیشتری برداریم، حداکثر مقدار δ یعنی ۴ حاصل می‌شود.

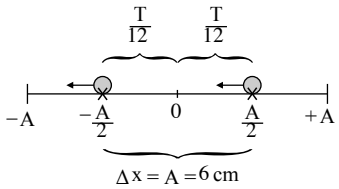


شکل «۱» شکل «۲» شکل «۳»

نکته: برای ماکسیمم کردن δ کافی است از رابطهٔ $p\delta \le ۲q$ استفاده کنیم:

$$p\delta \le ۲q \Rightarrow ۷\delta \le ۳۴ \Rightarrow \delta \le ۴٫۸ \Rightarrow \delta_{max} = ۴$$

۵۶ - گزینه ۳ چون مدت زمان دو جابجایی مساوی و هم جهت یکسان است، می‌توان فهمید که نوسانگر دو جابجایی یک اندازه در دو طرف وضع تعادل داشته است. باتوجه به شکل می‌توان نوشت:

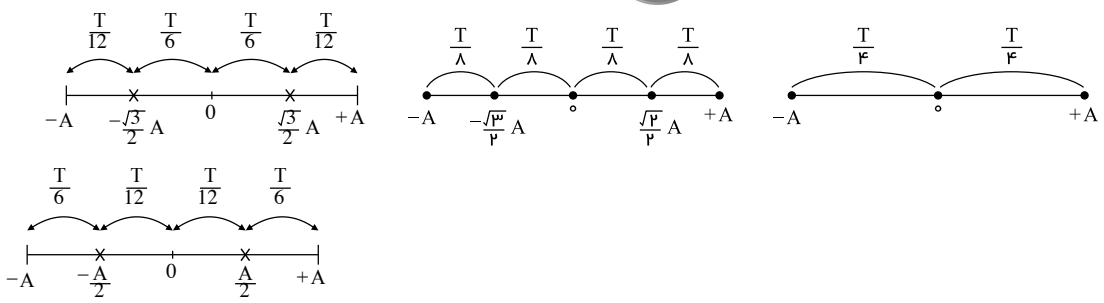


$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = A \xrightarrow{\Delta x_۱ = \Delta x_۲} \Delta x_۱ = \Delta x_۲ = \frac{A}{۲} = ۳cm \Rightarrow A = ۶cm$$

$$\frac{T}{۱۲} = \frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow T = \frac{۴۸}{۱۰۰} = \frac{۱۲}{۲۵}s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{(\frac{۱۲}{۲۵})} = \frac{۵۰\pi}{۱۲} = \frac{۲۵\pi}{۶}$$

$$v_{max} = A\omega = \frac{۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵\pi}{۶} = \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۳}{۴}m/s$$

نکته: زمان‌های طلایی:



۵۷ ـ گزینه ۱ جابه‌جایی برابر با طول خط AD:

$$OD = \sqrt{(۸)^۲ - (۷)^۲} = \sqrt{۶۴ - ۴۹} = \sqrt{۱۵}$$

$$\text{جابه‌جایی} = AO + OD = ۷ + \sqrt{۱۵}$$

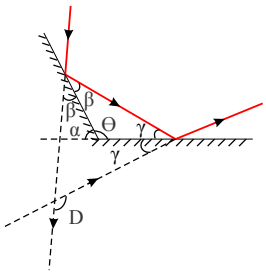
و مسافت طی شده مجموع طول AB و BC و CD:

$$\text{مسافت طی شده} = AB + BC + CD = ۷ + ۷ + ۸ = ۲۲km$$

۵۸ ـ گزینه ۲

مطابق قانون بازتاب عمومی ثابت می‌شود که در آینه‌های تخت، هنگامی که زاویه‌ی بین دو آینه بزرگتر از ۹۰° باشد، زاویه‌ی انحراف (زاویه بین پرتو تابش به آینه (۱) با پرتو بازتابش از آینه‌ی (۲)) از رابطه‌ی $D = ۲\pi - ۲\theta$ یا $D = ۲\alpha$ به دست می‌آید.

از آن جایی که در یک مثلث اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی برابر مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی غیر مجاور آن است، می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} D = ۲\beta + ۲\gamma = ۲(\beta + \gamma) \\ \theta + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \beta + \gamma = \pi - \theta \end{cases} \Rightarrow D = ۲(\pi - \theta) \xrightarrow{\theta = \pi - \alpha} D = ۲\pi - ۲(\pi - \alpha) = ۲\alpha$$

۵۹ ـ گزینه ۱ با استفاده از رابطهٔ تراز شدت نسبی دو صوت می‌توان نوشت:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} \Rightarrow ۱۲۰ - ۸۰ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} \Rightarrow ۴۰ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$$

$$\Rightarrow ۴ = \log \frac{I_۲}{I_۱} \Rightarrow ۱۰^۴ = \frac{I_۲}{I_۱}$$

باتوجه به تناسب $I \alpha \frac{A^۲ f^۲}{d^۲}$ می‌توان نوشت:

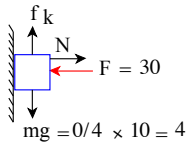
$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{d_۱}{d_۲})^۲ \Rightarrow ۱۰^۴ = (\frac{۲۰}{d_۲})^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = \frac{۲۰}{d_۲} \Rightarrow d_۲ = ۰/۲m = ۲۰cm$$

۶۰ ـ گزینه ۳ با رسم نیروی وارد برجسم به راحتی می‌توان دریافت که نیروی عمودی تکیه گاه، هم اندازه با نیروی F است. یعنی:

$$f_k = \mu F_N = \mu F = ۰/۱ \times ۳۰ = ۳$$

$$mg - f_k = ma$$

$$۴ - ۳ = ۰/۴a \Rightarrow a = ۲/۵m/s^۲$$



۶۱ ـ گزینه ۳ ابتدا شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$a = g - \frac{f_D}{m} \Rightarrow a = ۱۰ - \frac{۲}{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow a = ۱۰ - ۸ = ۲m/s^۲$$

با استفاده از معادلهٔ سرعت_جابه‌جایی داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = -۲a\Delta y \Rightarrow v^۲ - ۰ = -۲ \times ۲ \times (-۴۰) \Rightarrow v^۲ = ۱۶۰ \Rightarrow |v| = ۴\sqrt{۱۰}m/s$$

۶۲ ـ گزینه ۳

$$\text{تراز شدت صوت} \quad \beta = ۱۰ \log \frac{I}{I_۰} \rightarrow \text{تغییر تراز شدت صوت} \quad \Delta\beta = \beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۰} - ۱۰ \log \frac{I_۱}{I_۰}$$

$$\Delta\beta = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \xrightarrow{\Delta\beta=۶dB\ ,\ I_۲=۱۰^t\ ,\ I_۱=۱۰^۰=۱} ۶ = ۱۰\log(۱۰^t) \to ۶ = ۱۰t \to t = ۰/۶s$$

۶۳ ـ گزینه ۲ دو قطار زمانی از کنار هم به‌طور کامل رد می‌شوند که مکان انتهای دو قطار یکسان شود. بنابراین معادلهٔ مکان – زمان دو قطار را برای انتهای آن‌ها می‌نویسیم:

$v_۱ = ۵۴\,km/h = \frac{۵۴}{۳/۶}\,m/s = ۱۵\,m/s$ در جهت مثبت محور x

$v_۲ = -۱۰۸\,km/h = \frac{-۱۰۸}{۳/۶}\,m/s = -۳۰\,m/s$ در جهت منفی محور x

$$x'_A = x_A - \ell_۱ = -۲۰۰ - ۳۰۰ = -۵۰۰m$$

$$x'_B = x_B + \ell_۲ = ۶۰۰ + ۴۰۰ = ۱۰۰۰m$$

قطار (۱): $x_۱ = v_۱t + x'_A \Rightarrow x_۱ = ۱۵t - ۵۰۰$

قطار (۲): $x_۲ = v_۲t + x'_B \Rightarrow x_۲ = -۳۰t + ۱۰۰۰$

$$\xrightarrow{x_۱=x_۲} t = \frac{۱۵۰۰}{۴۵} = \frac{۱۰۰}{۳}s \xrightarrow[x_A=۱۵t-۲۰۰]{t=\frac{۱۰۰}{۳}s} x_A = ۱۵\times\frac{۱۰۰}{۳} - ۲۰۰ = ۳۰۰m$$

۶۴ ـ گزینه ۲ اگر طول مسیر را $۲l$ فرض کنیم، در نیمهٔ ابتدایی مسیر داریم:

$$l = v_۱t_۱ \Rightarrow l = ۱۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{l}{۱۰}$$

فرض می‌کنیم متحرک نیمهٔ دوم مسیر را در زمان $۲t_۲$ طی کند، بنابراین داریم:

$$l = vt_۲ + ۳vt_۲ = ۴vt_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{l}{۴v}$$

حال با استفاده از تعریف سرعت متوسط، داریم:

$$v_{av} = \frac{۲l}{t_۱ + ۲t_۲} = \frac{۲l}{\frac{l}{۱۰} + ۲(\frac{l}{۴v})} \Rightarrow ۱۶ = \frac{۲}{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲v}} \Rightarrow v = ۲۰\frac{m}{s}$$

۶۵ ـ گزینه ۲ قدم اول: رابطهٔ دورهٔ تناوب این دو نوسانگر را می‌یابیم:

$$\frac{۳T_B}{۴} = \frac{T_A}{۲} \Rightarrow T_A = \frac{۳}{۲}T_B \xrightarrow{\omega=\frac{۲\pi}{T}} \omega_B = \frac{۳}{۲}\omega_A \quad (۱)$$

قدم دوم: با توجه به نمودار، رابطهٔ بین بیشینهٔ سرعت نوسانی این دو نوسانگر به‌صورت مقابل است:

$$(v_m)_B = \frac{۱}{۲}(v_m)_A \quad (۲)$$

قدم سوم: بیشینهٔ تندی نوسانگر یک نوسانگر ساده از رابطهٔ $v_{\max} = A\omega$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$A = \frac{v_m}{\omega} \to \frac{A_A}{A_B} = (\frac{v_{m_A}}{v_{m_B}})(\frac{\omega_B}{\omega_A}) = (۲)(\frac{۳}{۲}) = ۳$$

۶۶ ـ گزینه ۴ در این حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی کشسانی فنر، نیروی مرکزگرای وارد بر جسم را تأمین می‌کند. داریم:

$$F_{net} = m\frac{v^۲}{r} \xrightarrow[F_{net}=kx]{v=\frac{۲\pi r}{T}} kx = \frac{۴\pi^۲ mr}{T^۲} \Rightarrow ۶۴۰\times(۵۰-۴۰)\times۱۰^{-۲} = \frac{۴\pi^۲\times۲\times۵۰\times۱۰^{-۲}}{T^۲} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۴}s$$

۶۷ ـ گزینه ۳ گزینهٔ ۱ نادرست است. ممکن است متحرک به سمت بالا $(v > ۰)$ یا پایین $(v < ۰)$ حرکت کند.

گزینهٔ ۲، نادرست است. $x > ۰$ است یعنی $a < ۰$ است. اگر به طرف بالا برود $(v > ۰)$ و حرکت کندشونده می‌شود و اگر به طرف پایین حرکت کند $(v < ۰)$ و حرکت تندشونده می‌شود.

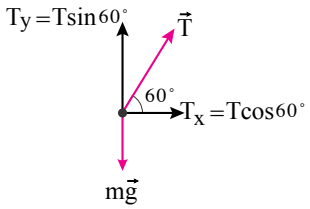
گزینهٔ ۳، درست است. از آن‌جایی که حالت تعادل در نقطهٔ O است و متحرک در حال نوسان، پایین‌تر از O می‌رود پس فنر می‌تواند در لحظهٔ نمایش داده شده در حالت آزاد خود باشد.

گزینهٔ ۴، نادرست است. $x > ۰$ در نتیجه $a < ۰$ است.

۶۸ ـ گزینه ۳

ابتدا نیروهای وارد شده به وزنه را رسم می‌کنیم:

دقت کنید که به جسم فقط دو نیروی کشش نخ و نیروی وزن وارد می‌شود که نیروی کشش نخ را در راستای محورهای مختصات تجزیه کرده‌ایم.



چون جسم در راستای قائم ساکن است، پس برآیند نیروهای آن در این راستا صفر می‌شود. پس:

$$F_{net_y} = ۰ \Rightarrow T\sin ۶۰^\circ = mg \Rightarrow T(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = mg \Rightarrow T = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}mg$$

چون جسم نسبت به واگن ساکن است، پس شتاب حرکت آن در راستای افقی همان شتاب حرکت واگن خواهد بود و به این ترتیب داریم:

$$F_{net_x} = ma \Rightarrow T\cos ۶۰^\circ = ma \Rightarrow \frac{۱}{۲}(T) = ma \xrightarrow{T=۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}mg} \frac{۱}{۲}(۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cancel{m}g) = \cancel{m}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}g$$

۶۹ ـ گزینه ۳

می‌دانیم که نیروی مقاوم هوا تابعی از تندی جسم است، در آنجا چون $|V_A| > |V_B|$ است داریم:

$$m_A > m_B \Rightarrow m_A g > m_B g$$

$$\text{شتاب متوسط}\ a = g - \frac{f}{m}$$

$$m_A > m_B \Rightarrow a_A > a_B \Rightarrow \begin{cases} t_A < t_B \\ |v_A| > |v_B| \end{cases}$$

زمانی که به تندی حدی می‌رسند نیروی f و mg برابر می‌شوند.

$$|V_A| > |V_B| \Rightarrow |f_A| > |f_B|$$

بنابراین (الف) نادرست، (ب) و (پ) درست است.

۷۰ ـ گزینه ۲

فرض کنیم لحظهٔ موردنظر $t = t'$ است.

$$B : x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + \cancel{x_{۰B}}^{\,۰}$$

$$A : x_A = v_A t + x_{۰A}$$

در $t = ۴s$ و $t = ۱۲s$: $x_A = x_B$ است:

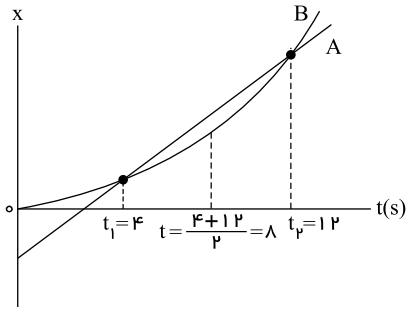
$$t = ۴s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۴^۲ + v_{۰B} \times ۴ = v_A \times ۴ + x_{۰A} \quad (۱)$$

$$t = ۱۲s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۱۲^۲ + v_{۰B} \times ۱۲ = v_A \times ۱۲ + x_{۰A} \quad (۲)$$

$$(۲) - (۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B(۱۴۴ - ۱۶) + ۸v_{۰B} = ۸v_A \Rightarrow ۶۴a_B + ۸v_{۰B} = ۸v_A$$

$$\text{از طرفی:} \begin{cases} ۸a_B + v_{۰B} = v_A = \text{ثابت} \\ v_B = a_B t + v_{۰B} \end{cases} \Rightarrow ۸a_B + \cancel{v_{۰B}} = a_B t' + \cancel{v_{۰B}} \Rightarrow t' = ۸s$$

روش دوم:



چون نمودار B قسمتی از یک سهمی است، پس حرکت B شتابدار است با شتاب ثابت است.

از طرف دیگر می‌دانیم که شیب خط A که دو نقطهٔ از نمودار B را قطع کرده برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۴s$ و $t_۲ = ۱۲s$ است.

پس تا اینجا دریافتیم که:

$$V_A = V_{av_B}$$

و اما همه میدانیم که در حرکت با شتاب ثابت، V_{av} بین د لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با V در لحظهٔ $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

حال با ای مقدمه می‌دانیم که

یعنی در لحظهٔ $t = 8s$ سرعت متحرک B با سرعت متحرک A هم اندازه است.

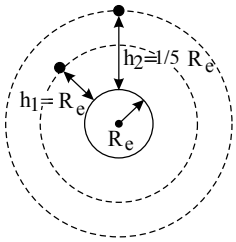
۷۱ ـ گزینه ۲ گام اول: متحرک با شتاب a، سریع‌تر از متحرک با شتاب $\frac{9}{16}a$ حرکت می‌کند. بنابراین اگر متحرک با شتاب a (را که با A نشان خواهیم داد) مسیر مستقیم معین شده را در مدت زمان Δt_A طی کند متحرک دوم (که با B نشان می‌دهیم) در مدت زمان $\Delta t_B = \Delta t_A + 2s$ همان مسیر را طی خواهد نمود:

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{1}{2}a\Delta t_A^2 + v_{0A}\Delta t_A \\ \Delta x_B = \frac{1}{2}(\frac{9}{16}a)(\Delta t_A + 2)^2 + v_{0B}\Delta t_B \end{cases} \xrightarrow[v_{0A}=v_{0B}=0]{\Delta x_A=\Delta x_B} a\Delta t_A^2 = \frac{9}{16}a(\Delta t_A + 2)^2 \Rightarrow \Delta t_A = \frac{3}{4}(\Delta t_A + 2) = \frac{3}{4}\Delta t_A + 1.5 \Rightarrow 0.25\Delta t_A = 1.5 \Rightarrow \Delta t_A = 6s$$

۷۲ ـ گزینه ۴ گام اول: شعاع دوران را در دو حالت تعیین می‌کنیم:

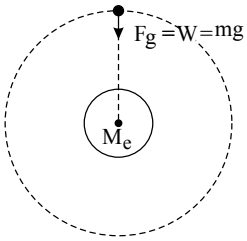
$$r_1 = R_e + h_1 = 2R_e$$

شعاع دوران $r_2 = R_e + h_2 = R_e + 1.5R_e = 2.5R_e$



گام دوم: هنگامی که یک ماهواره پیرامون کرهٔ زمین آزادانه دوران می‌کند (فقط تحت تأثیر نیروی گرانش کرهٔ زمین قرار دارد.) شتاب مرکزگرای ماهواره همان شتاب گرانش در محل ماهواره است:

$$\begin{cases} F_c = ma_c \\ F_c = F_g = mg \end{cases} \Rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m}a_c \Rightarrow a_c = g$$

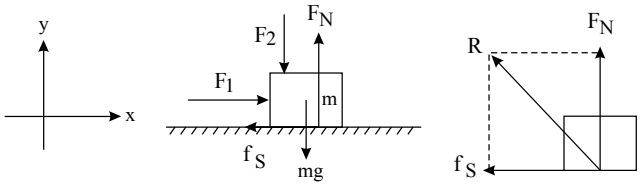


گام سوم:

$$a_c = g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = (\frac{r_1}{r_2})^2 = (\frac{2R_e}{2.5R_e})^2 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{25} \Rightarrow \text{درصد تغییرات} = (\frac{a_2}{a_1} - 1) \times 100 = (\frac{16}{25} - 1) \times 100 = \frac{-900}{25} = -36\%$$

۷۳ ـ گزینه ۲

در هر حالت نیروی عمودی تکیه گاه و نیروی اصطحکاک را می‌یابیم. چون جسم ساکن است، در هر دو حالت نیروی اصطحکاک با نیروی افقی هم اندازه است.



$$\begin{cases} R = \sqrt{F_N^2 + f_s^2} \quad (1) \\ x : (F_{net})_x = ma_x = 0 \Rightarrow f_s = F_1 \quad (2) \\ y : (F_{net})_y = ma_y = 0 \Rightarrow F_N = F_2 + mg \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow R = \sqrt{(F_2 + mg)^2 + (F_1)^2} \quad (*)$$

$|\vec{F_1}|$ و $|\vec{F_2}|$ هریک دو برابر شده و جسم همچنان ساکن می‌ماند.

$$R' = \sqrt{(2F_2 + mg)^2 + (2F_1)^2} \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow \frac{R'}{R} = \sqrt{\frac{4F_1^2 + (2F_2 + mg)^2}{F_1^2 + (F_2 + mg)^2}} = k$$

$$\text{می‌دانیم} : \frac{4F_1^2 + (2F_2 + 2mg)^2}{F_1^2 + (F_2 + mg)^2} = \frac{4[F_1^2 + (F_2 + mg)^2]}{[F_1^2 + (F_2 + mg)^2]} = 4$$

$$\text{از طرفی} : \underbrace{\frac{4F_1^2 + (2F_2 + 2mg)^2}{F_1^2 + (F_2 + mg)^2}}_{4} > \frac{4F_1^2 + (2F_2 + mg)^2}{F_1^2 + (F_2 + mg)^2} = k^2 \to k^2 < 4 \to \begin{cases} k < 2 \\ \text{صورت کسر} > \text{مخرج کسر} \end{cases} \Rightarrow 1 < k < 2$$

راه دوم: به جای F_1 و F_2 و mg اعداد دلخواه منطقی قرار داده و ...

۷۴ - گزینه ۴ t ثانیه nام یعنی از $t_1 = (x-1)t$ تا $t_2 = nt$ و t ثانیه mام یعنی $t_1 = (m-1)t$ تا $t_2 = mt$ و $v_0 = 0$ است؛ یعنی $x = \frac{1}{2}at^2 + x^0$

$$\Delta x = x_{t_2} - x_{t_1}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at_2^2 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) = \frac{a}{2}[n^2t^2 - (n-1)^2t^2] = \frac{a}{2}(2n-1)t^2$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\frac{a}{2}(2n-1)t^2}{\frac{a}{2}(2m-1)t^2} = \frac{2n-1}{2m-1}$$

نکته: جابه‌جایی در t ثانیه nام برابر است با:

$$\Delta x = \frac{a}{2}(2n-1)t^2 + v_0 t$$

۷۵ - گزینه ۳ دوره نوسان کم‌دامنه نوسان‌کننده B، دو برابر نوسان‌کننده A است پس:

$$T_B = 2T_A \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = 2 \xrightarrow{(T=2\pi\sqrt{\frac{k}{m}})} \sqrt{\frac{m_B}{m_A}} \times \sqrt{\frac{k_A}{k_B}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2m}{m}} \times \sqrt{\frac{k_A}{k_B}} = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{k_A}{k_B}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{k_A}{k_B} = 2(I)$$

انرژی مکانیکی دو نوسان‌کننده با یکدیگر برابر است پس:

$$E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}k_A A_A^2 = \frac{1}{2}k_B A_B^2 \Rightarrow \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 = \frac{k_A}{k_B} \xrightarrow{(I)} \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{A_B}{A_A} = \sqrt{2}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۷۶ - گزینه ۴ ابتدا شتاب حرکت و سرعت اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = 40\frac{m}{s}$$
$$t_2 = 5s \Rightarrow v_2 = 36\frac{km}{h} \times \frac{5}{18} = 10\frac{m}{s}$$
$$v = at + v_0$$
$$\begin{cases} 40 = 2a + v_0 \\ 10 = 5a + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 60\frac{m}{s} \\ a = -10\frac{m}{s^2} \end{cases}$$
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \times (-10) \times 5^2 + 60 \times 5 = -125 + 300 = 175m$$

۷۷ - گزینه ۳ عبارت ب نادرست است. در انتشار امواج طولی و عرضی ذرات محیط تنها در جای خود نوسان می‌کنند.

۷۸ - گزینه ۱

$$\begin{cases} B = 10\log\frac{I}{I_0} \\ I = \frac{A^2 \cdot f^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta\beta = \beta_A - \beta_B = 10\log\frac{I_A}{I_0} - 10\log\frac{I_B}{I_0} = 10\log\frac{I_A}{I_B} = 10\log(\frac{A_A}{A_B})^2(\frac{f_A}{f_B})^2(\frac{r_B}{r_A})^2 = 10\log 36 \times 16 \times \frac{1}{9} = 10\log 64$$
$$= 10\log 2^6 = 60\log 2 = 18dB$$

۷۹ - گزینه ۴

$$A_1 = A_2, \rho_2 = \frac{1}{4}\rho_1, F_2 = 4F_1$$
$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}}$$
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1} \times \frac{\rho_1}{\rho_2} \times \frac{A_1}{A_2}} = \sqrt{4 \times 4 \times 1} = 4$$
$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{v'}{v} \times \frac{f}{f'} \Rightarrow \frac{\lambda'}{\lambda} = 4 \times \frac{f}{8f} = \frac{1}{2}$$

فاصلهٔ دو نقطه در فاز مخالف حداقل $\frac{\lambda}{2}$ است:

$$\frac{\frac{\lambda'}{2}}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

۸۰ - گزینه ۱

$$\begin{matrix} \beta_1 = 28dB = 10\log(\frac{I_1}{I_0}) \\ \beta_2 = 92dB = 10\log(\frac{I_2}{I_0}) \end{matrix} \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10\log(\frac{I_2}{I_0}) - 10\log(\frac{I_1}{I_0}) \Rightarrow 92 - 28 = 10\log(\frac{I_2}{I_1}) \Rightarrow 6/4 = \log(\frac{I_2}{I_1}) \quad (*)$$

اکنون ۶٫۴ را به شکل log می‌نویسیم:

$$6/4 = 7 - 0/6 = \log 10^7 - 2(\underbrace{0/3}_{\log 2}) = \log 10^7 - \log 2^2 = \log(\frac{10^7}{4}) \Rightarrow 6/4 = \log(\frac{10^7}{4}) \quad (**)$$
$$(*)\ ,\ (**) \Rightarrow \log(\frac{I_2}{I_1}) = \log(\frac{10^7}{4}) \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{4} \times 10^7 = 0/25 \times 10^7 \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = 2/5 \times 10^6$$

۸۱ - گزینه ۲ با توجه به برابر بودن E° دو سلول داریم:

$$\overbrace{E_A^\circ - E_B^\circ}^{\text{سلول اول}} = \overbrace{E_B^\circ - E_C^\circ}^{\text{سلول دوم}} \Rightarrow -0/41 - E_B^\circ = E_B^\circ - (-2/37) \Rightarrow E_B^\circ = -1/39V$$

۸۲ - گزینه ۲ معادلهٔ واکنش گزینهٔ (۲) با انتقال الکترون از $Zn(s)$ به $Sn^{2+}(aq)$ انجام می‌پذیرد.

$$\underset{\text{کاهنده}}{Zn(s)} + \underset{\text{اکسنده}}{Sn^{2+}(aq)} \longrightarrow Zn^{2+}(aq) + Sn(s)$$
$$E^\circ(\text{واکنش}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = (-0/15) - (-0/76) = +0/61V$$

۸۳ - گزینه ۴ جهت حرکت کاتیون‌ها به سمت کاتد (مس) است. در سلول‌های الکتروشیمیایی همواره کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به آند حرکت می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در سلول هیدروژن، آب از بخش کاتدی خارج می‌شود.

۲) SHE در مقابل برخی فلزها(مانند آهن و روی)نقش کاتد و در مقابل برخی فلزها(مانند مس و پلاتین)،نقش آند را ایفا می‌کند.

۳) در آبکاری با مس، الکترولیت باید نمکی از مس باشد.

۸۴ - گزینه ۲ موازنه را با اتم‌های اکسیژن در MnO_4^- آغاز می‌کنیم، با دادن ضریب ۱ به MnO_4^- و ضریب ۴ به H_2O تعداد اکسیژن‌های دو طرف برابر می‌شود. در ادامه با دادن ضریب ۱ به Mn^{2+} و ضریب ۸ به H^+، تعداد اتم‌های Mn و H را نیز موازنه می‌کنیم.

$$1MnO_4^- + 8H^+(aq) + ?I^-(aq) \rightarrow 1Mn^{2+}(aq) + ?I_2(s) + 4H_2O(l)$$

به سراغ موازنه بار می‌رویم، با دادن ضریب ۵ به I^-، بار الکتریکی دوطرف برابر می‌شود و با دادن ضریب $\frac{5}{2}$ به I_2، تعداد اتم‌های I نیز در دو طرف برابر می‌شود.

$$\underbrace{1MnO_4^- + 8H^+(aq) + 5I^-(aq)}_{2+} \rightarrow \underbrace{1Mn^{2+}(aq) + \frac{5}{2}I_2(s) + 4H_2O(l)}_{2+}$$

عدد اکسایش Mn از $+7$ در MnO_4^- به $+2$ در Mn^{2+} می‌رسد یعنی ۵ واحد کاهش می‌یابد؛ بنابراین به ازای مصرف هر یون MnO_4^-، ۵ الکترون مبادله می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در این واکنش، یون‌های یدید (I^-) کاهنده بوده و اکسایش می‌یابند.

۳) به ازای هر مول یون MnO_4^-، ۲٫۵ مول I_2 تولید می‌شود.

۴) همواره کاتیون‌ها از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد حرکت می‌کنند.

۸۵ - گزینه ۲

$$3{,}01 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 mole^-}{6{,}02 \times 10^{23} e^-} = 0{,}5 mole^-$$

$$0{,}5 mole^- \times \frac{1 molNi}{2 mole^-} = 0{,}25 molNi$$

$$0{,}5 mole^- \times \frac{2 molAg}{2 mole^-} = 0{,}5 molAg$$

$Ni = 0{,}25 mol \times 58 = 14{,}5 g$ (از جرم تیغه کم می‌شود)

$Ag = 0{,}5 mol \times 108 = 54 g$

$54 g \times \frac{20}{100} = 10{,}8 g$ (به جرم تیغه اضافه می‌شود)

تغییرات جرم تیغه $= 10{,}8 - 14{,}5 = -3{,}7 g$

بنابراین ۳٫۷ گرم از جرم تیغه کم می‌شود.

۸۶ - گزینه ۳ جهت حرکت الکترون‌ها در هر دو نوع سلول گالوانی و الکترولیتی از آند به کاتد است که در سلول‌های گالوانی از قطب منفی به قطب مثبت خواهد بود.

۸۷ - گزینه ۴ می‌دانیم $E^\circ(H^+/H_2) = 0$ پس فلز Al با محلول HCl حاوی (H^+) واکنش می‌دهد، ولی فلز مس با HCl واکنش نمی‌دهد.

$$Al(s) + 3HCl(aq) \rightarrow AlCl_3(aq) + \frac{3}{2}H_2(g)$$

$Cu + HCl \rightarrow$ واکنش نمی‌دهد

و همچنین نیم واکنش انجام شده به صورت $Al \rightarrow Al^{3+} + 3e^-$

$$?mole^- = 2.408 \times 10^{24} e^- \times \frac{1 mole^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} = 4 mole^-$$

$$?gAl = 4 mole^- \times \frac{1 molAl}{3 mole^-} \times \frac{27 gAl}{1 molAl} = 36 gAl$$

۱۴ گرم (۵۰ − ۳۶ = ۱۴) از آلیاژ اولیه مس بوده است و درصد جرمی مس به صورت زیر است:

$$\%Cu = \frac{14 gCu}{50 g \text{ کل}} \times 100 = 28\%$$

۸۸ - گزینه ۳ در سلول (۱) آهن قطب منفی یعنی آند است و اکسایش می یابد و X کاتد است و یون های آن کاهش می یابند:

$$\begin{cases} Fe(s) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2e^- \\ 2X^+(aq) + 2e^- \rightarrow 2X(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow Fe(s) + 2X^+(aq) \rightarrow Fe^{2+}(aq) + 2X(s)$$

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \rightarrow 0.78 = E^\circ(X^+/X) - (-0.44) \rightarrow E^\circ(X^+/X) = 0.34V$$

در سلول (۲) آهن قطب مثبت یعنی کاتد است و یون های آن کاهش می یابد و Y آند است و اکسید می شود:

$$\begin{cases} Y(s) \rightarrow Y^{2+}(aq) + 2e^- \\ Fe^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Fe(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow Y(s) + Fe^{2+}(aq) \rightarrow Fe(s) + Y^{2+}(aq)$$

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} \rightarrow +0.32 = (-0.44) - E^\circ(Y^{2+}/Y)$$

$$\rightarrow E^\circ(Y^{2+}/Y) = -0.76V$$

$$\xrightarrow{\text{سلول گالوانی جدید}} emf = E^\circ(X^+/X) - E^\circ(T^{2+}/Y) = 0.34 - (-0.76) = 1.10V$$

بررسی سایر گزینه ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به این که E° فلز Y از X کم تر است، کاهنده تر بوده و تمایل آن به اکسید شدن بیش تر است.

گزینهٔ «۲»:

$$\frac{\text{تغییر جرم } X}{\text{تغییر جرم } Y} = \frac{n mole^- \times \frac{1 molX}{1 mole^-} \times \frac{64 gX}{1 molX}}{n mole^- \times \frac{1 molY}{2 mole^-} \times \frac{65 gY}{1 molY}} \simeq 2$$

گزینهٔ «۴»: از آن جایی که واکنش $Fe^{2+}(aq)$ و فلز Y انجام شدنی است، انتخاب ظرف از جنس Y مناسب نیست.

۸۹ ـ گزینه ۱

$$Zn + CuSO_4 \rightarrow ZnSO_4 + Cu$$

$$3.2gCu \times \frac{1molCu}{64gCu} \times \frac{1molCu^{2+}}{1molCu} = 0.05molCu^{2+}$$ مصرفی

$$100mL \times \frac{2molCuSO_4}{1000mL} \times \frac{1molCu^{2+}}{1molCuSO_4} = 0.2molCu^{2+}$$ اولیه

$$0.2 - 0.05 = 0.15molCu^{2+}$$ باقی‌مانده

برای محاسبهٔ تعداد مول تولید شدهٔ Zn^{2+} باید از تعداد مول مصرفی Cu^{2+} استفاده کنیم:

$$0.05molCu^{2+} \times \frac{1molZn^{2+}}{1molCu^{2+}} = 0.05molZn^{2+}$$ تولید شده

$$\frac{[Cu^{2+}]}{[Zn^{2+}]} = \frac{n_{Cu^{2+}}}{n_{Zn^{2+}}} = \frac{0.15}{0.05} = 3$$

۹۰ ـ گزینه ۱ فقط عبارت (ت) درست است.

باتوجه به انجام‌پذیر بودن واکنش II و انجام‌ناپذیر بودن واکنش‌های I و III می‌توان موقعیت فلزها را در سری الکتروشیمیایی به‌صورت روبرو در نظر گرفت (هر فلز در سری با کاتیون بالایی خود واکنش خودبخودی می‌دهد)

Ag	0.8
M	
Al	-1.66
Mg	-2.38

آ) فلز M می‌تواند دارای پتانسیل کاهشی مثبت یا منفی باشد.

ب) باتوجه به مشخص نبودن علامت پتانسیل کاهشی فلز M، نمی‌توان نقش آن را در مقابل نیم‌سلول SHE تعیین نمود.

پ)در سری الکتروشیمیایی، فلز M، بالاتر از Al است.

ت)فلز M در مقابل فلزهای Al و Mg، نقش کاتد و در مقابل فلز نقره، نقش آند خواهد داشت.

۹۱ ـ گزینه ۲ در آهن سفید نیم‌واکنش ها و واکنش کلی عبارت است از:

$$2\times \begin{cases} Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^- \\ 2H_2O + O_2 + 4e^- \rightarrow 4OH^- \end{cases}$$

$$2\underbrace{Zn}_{0} + \underbrace{O_2}_{\text{اکسنده}} + 2H_2O \longrightarrow 2\underbrace{Zn^{2+}}_{+2} + 4OH^-$$

$$4 = 2 \times 2$$

تعداد الکترون مبادله شده

۹۲ ـ گزینه ۴ فلزها، اکسید شده و کاهنده هستند. فلز M با E° مثبت‌تر، کاهندهٔ ضعیف‌تری نسبت به فلز N است، به عبارت دیگر کاتیون‌های M^{2+}، اکسنده تر از N^+ هستند.

۹۳ ـ گزینه ۲ Mg کاهنده تر از Ag بوده و آند می باشد.

$$Mg(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + 2Ag(s)$$

جرم الکترود Mg کاهش پیدا کرده و جرم الکترود Ag افزایش می یابد. فرض می کنیم x مول Mg در این واکنش مصرف شود:

$$?g\,Mg = xmolMg \times \frac{24g\,Mg}{1mol\,Mg} = 24xg\,Mg$$

$$?g\,Ag = xmolMg \times \frac{2mol\,Ag}{1mol\,Mg} \times \frac{108g\,Ag}{1mol\,Ag} = 216xg\,Ag$$

$$216x - 24x = 288 \Rightarrow x = 1.5mol$$

$$?e^- = 1.5molMg \times \frac{2mole^-}{1molMg} \times \frac{6.02 \times 10^{23}e^-}{1mol\,e^-} = 1.806 \times 10^{24}e^-$$

روش دوم:

$$2Ag - Mg \sim 2e$$

$$\frac{288g}{2(108) - 24g} = \frac{xe^-}{2 \times 6.02 \times 10^{23}} \Rightarrow x = 1.806 \times 10^{24}e^-$$

۹۴ - گزینه ۴ با توجه به اینکه فلز M در واکنش با محلول اسید ها گاز H_2 آزاد کرده است، پتانسیل کاهشی فلز M منفی است. با توجه به بار کاتیون M^{3+} فلز M نمی تواند Mg یا Zn باشد.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینهٔ ۱) قدرت کاهندگی A از Ag بیشتر است.

گزینهٔ ۲) لیتیم قوی ترین کاهنده در میان گونه های پایدار است.

گزینهٔ ۳) پتانسیل کاهشی استاندارد M منفی است و اگر A^{2+} کاتیون های Cu^{2+} یا Pt^{2+} بود واکنش M با A^{2+} انجام پذیر بود.

۹۵ - گزینه ۱

گزینهٔ ۱) نادرست است.

بررسی گزینه ها:

گزینهٔ ۱) در فرایند صنعتی تولید سدیم در سلول دانز از برقکافت سدیم کلرید مذاب استفاده می کنیم. در این فرایند کاتیون های Na^+ به سمت الکترود کاتد (قطب منفی) حرکت کرده و در آنجا کاهش می یابند و فلز سدیم تولید می شود. از طرفی آنیون های Cl^- به سمت الکترود آند (قطب مثبت) حرکت کرده و در آنجا اکسایش می یابند و گاز کلر تولید می شود.

گزینهٔ ۲) در فرایند هال گاز اکسیژن که اکسندهٔ قوی می باشد، در دمای بالا با الکترود آند (گرافیت) واکنش داده و گاز CO_2 تولید می کند:

$$\underbrace{C(s,\ \text{گرافیت})}_{\text{الکترود آندی}} + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$$

گزینهٔ ۳) در فرایند آبکاری، جسمی که قرار است روکش فلزی روی آن ایجاد شود، به عنوان کاتد سلول الکترولیتی به قطب منفی باتری متصل می شود. از طرفی فلزی که اتم های آن قرار است روی جسم مورد نظر بنشیند، به عنوان آند سلول الکترولیتی به قطب مثبت باتری متصل می شود. در فرایند آبکاری، الکترود آند بی اثر نیست و در واکنش شرکت می کند.

گزینهٔ ۴) سلول هیدروژن-اکسیژن رایج ترین سلول سوختی است و در آن گاز هیدروژن با گاز اکسیژن به صورت کنترل شده و غیرمستقیم واکنش می دهند تا بتوان بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی این واکنش را به انرژی الکتریکی تبدیل نمود.

۹۶ - گزینه ۳ به‌جز عبارت (ت) بقیهٔ عبارت‌ها درست‌اند.

بررسی برخی از عبارت‌ها:

ب) ذرهٔ a، Fe^{2+} و ذرهٔ b، Fe^{3+} بوده که با یون OH^- به‌ترتیب به رسوب‌های $Fe(OH)_2$ سبز رنگ و $Fe(OH)_3$ قرمز رنگ تبدیل می‌شوند.

پ) در شکل (۱) و در محل a نیم‌واکنش اکسایش آهن صورت می‌گیرد.

ت)با حل شدن SO_3 در آب، محیط اسیدی شده و خوردگی آهن در محیط اسیدی به میزان بیشتری روی می‌دهد.

ث) در شکل (۱) و در محل b، نیم‌واکنش کاهش اکسیژن به‌صورت: $O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 4OH^-(aq)$ انجام می‌گیرد که یون‌های OH^- رنگ کاغذ pH را آبی رنگ می‌کند.

۹۷ - گزینه ۴ ابتدا باید حساب کنیم چند کیلوگرم $H_2(g)$ از واکنش روبه‌رو به‌دست می‌آید:

$$CH_4(g) + H_2(g) \rightarrow CO(g) + 3H_2(g)$$

$$\left[\frac{\overset{(CH_4)}{\text{گرم}(g)} \times \frac{R}{100}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] = \left[\frac{\overset{(H_2)}{\text{گرم}(g)}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}\right] \Rightarrow \frac{30 \times 10^3 \times \frac{64}{100}}{1 \times 16} = \frac{x}{3 \times 2} \Rightarrow x = \frac{6 \times 30 \times \overset{4}{\cancel{64}} \times 10}{\cancel{16}} = 7200gH_2$$

واکنش کلی در سلول سوختی هیدروژن به‌صورت روبه‌رو است:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$$

پس برای محاسبه اکسیژن مصرف‌شده می‌توان نوشت:

$$[\frac{\overset{(H_2)}{\text{گرم}(g)}}{\text{جرم‌مولی}\times\text{ضریب}}] = [\frac{\overset{(O_2)}{\text{گرم}(g)}}{\text{جرم‌مولی}\times\text{ضریب}}] \Rightarrow \frac{7200}{2\times 2} = \frac{x}{1\times 32} \Rightarrow x = \frac{\overset{8}{\cancel{32}}\times 7200}{\cancel{4}} = 57600g = 57/6kg\ O_2$$

و برای قسمت پایانی هم می‌توان نوشت:

$$H_2(g) \rightarrow 2H^+(aq) + 2e^-$$

$$7200gH_2 \times \frac{1molH_2}{2gH_2} \times \frac{2molH^+}{1molH_2} = 7200molH^+$$

۹۸ - گزینه ۱ با توجه به پتانسیل‌های استاندارد کاهشی، مس در نقش آند و نقره در نقش کاتد است و الکترون از سمت الکترود مس به سمت الکترود نقره جابه‌جا می‌شود. واکنش به‌صورت زیر رخ می‌دهد:

$$Cu(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Cu^{2+}(aq) + 2Ag(s)$$

$2mole^-$ = شمار مول‌های الکترون مبادله شده

به‌ازای عبور ۲ مول الکترون، دو مول یون نقره از محلول کم می‌شود (۲۱۶گرم) و یک مول یون مس به محلول اضافه می‌شود (۶۴گرم) و جرم محلول ۱۵۲ گرم کاهش می‌یابد.

$$\text{کاهش جرم محلول} = 0/1mole^- \times \frac{152g\text{ کاهش جرم}}{2mole^-} = 7/6g \quad \text{کاهش جرم محلول}$$

۹۹ - گزینه ۳ با توجه به نیم‌واکنش‌های داده‌شده:

$$I)\ O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow 2H_2O(l) \quad E^\circ = +1/2V$$

$$II)\ 2H_2(g) \rightarrow 4H^+(aq) + 4e^- \quad E^\circ = 0/0V$$

با جمع آن‌ها واکنش کلی سلول به‌دست می‌آید:

$$2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$$

مورد اول نادرست بیان شده است. زیرا نیم‌واکنش (I) نیم‌واکنش کاتدی و نیم‌واکنش II نیم‌واکنش آندی را نشان می‌دهد.

مورد دوم درست است:

$$emf = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = 1/2 - 0 = 1/2V$$

با توجه به این‌که ولتاژ عملی سلول برابر ۰/۷۲ ولت می‌باشد:

$$\text{بازدهٔ درصدی سلول} = \frac{emf\ \text{عملی}}{emf\ \text{نظری}} \times 100 \Rightarrow \text{بازده} = \frac{0/72}{1/2} \times 100 = 60\%$$

مورد سوم درست است: با کمک معادلهٔ واکنش کلی سلول:

$$?gH_2O = 16/8LH_2 \times \frac{1molH_2}{22/4LH_2} \times \frac{2molH_2O}{2molH_2} \times \frac{18gH_2O}{1molH_2O} = 13/5gH_2O$$

عبارت چهارم: جهت حرکت یون‌های هیدرونیوم در غشا از آند به سمت کاتد بوده که همسو با جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی است.

۱۰۰ - گزینه ۴ معادله موازنه شده واکنش به صورت $2Al(s) + 6H^+(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3H_2$ و غلظت H^+ در محلول الکترولیت نیم‌سلول استاندارد هیدروژن برابر یک مول بر لیتر است با استفاده از کاهش جرم آلومینیم می‌توان غلظت ثانویهٔ H^+ را محاسبه نمود:

$$?molH^+(\text{مصرف شده}) = 8/1gAl \times \frac{1molAl}{27gAl} \times \frac{6molH^+}{2molAl} = 0/9molH^+$$

$$\Delta[H^+] = \frac{0/9mol}{3L} = 0/3mol\cdot L^{-1}$$

$$[H^+]_2 = 1 - 0/3 = 0/7mol\cdot L^{-1}\ \text{باقی‌مانده}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0/7) = -\log(7\times 10^{-1}) = 1 - 0/85 = 0/15$$

۱۰۱ - گزینه ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در سلول‌های گالوانی، آند قطبی منفی است.

۲) تشکیل اتم از یون یعنی یون باید کاهش بیابد و کاهش همواره در کاتد (قطب مثبت سلول گالوانی و قطب منفی سلول الکترولیتی) اتفاق می‌افتد.

۳) قطب منفی سلول الکترولیتی، کاتد است و در کاتد کاهش انجام می‌شود.

۱۰۲ - گزینه ۱ عبارت‌های دوم و چهارم درست‌اند.

- مورد اول : در این سلول، سرب که E° کوچکتری دارد، آند و پلاتین با E° بزرگ‌تر، کاتد است.

$$E^\circ(\text{سلول}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) \Rightarrow E^\circ(\text{سلول}) = ۱٫۲ - (-۰٫۱۳) = ۱٫۳۳V$$

- مورد دوم : هرچه E° یک نیم‌واکنش بیشتر باشد، گونهٔ سمت چپ آن اکسندهٔ قوی‌تر است و در سلول‌های گالوانی با اکسایش فلز در آند و تولید الکترون سطح تیغه دارای بار منفی می‌شود.

- مورد سوم : با اکسایش فلز به کاتیون،غلظت کاتیون در آند افزایش می‌یابد.

- مورد چهارم : با توجه به نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، با انجام کامل واکنش، دو مول الکترون، مبادله می‌شود.

$$\begin{cases} Pb \rightarrow Pb^{۲+} + ۲e^- \\ Pt^{۲+} + ۲e^- \rightarrow Pt \end{cases}$$

بنابراین با پیشرفت واکنش به میزان ۲۵٪، ۰٫۵ مول الکترون $(\frac{۲۵}{۱۰۰} \times ۲ = ۰٫۵)$ مبادله می‌شود.

$$۰٫۵ \times ۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳} = ۳٫۰۱ \times ۱۰^{۲۳}$$

- مورد پنجم: الکترون‌ها از سیم (مدار بیرونی) منتقل می‌شود، نه از دیوارهٔ متخلخل.

۱۰۳ - گزینه ۳ عبارت‌های «آ» ، «پ» و «ث» درست‌اند.

طبق واکنش اول، واکنش‌پذیری (قدرت کاهندگی) $B > A$ است.

طبق واکنش دوم، واکنش‌پذیری (قدرت کاهندگی) $D > A$ است.

طبق واکنش سوم، واکنش‌پذیری (قدرت کاهندگی) $A > C$ است.

طبق واکنش چهارم، واکنش‌پذیری (قدرت کاهندگی) $B > D$ است.

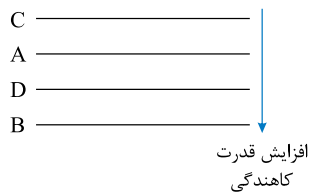
در نتیجه مقایسهٔ قدرت کاهندگی به‌صورت $B > D > A > C$ است.

بررسی عبارت‌ها:

آ) چون بیشترین اختلاف پتانسیل مربوط به B و C است.

ب) با توجه به جایگاه گونه‌ها فقط می‌توان بیشترین اختلاف پتانسیل را به دست آورد، ولی کمترین emf (اختلاف پتانسیل) را فقط با داشتن E° هر نیم سلول می‌توان محاسبه کرد.

پ)



$$D(s) + C^{۲+}(aq) \rightarrow D^{۳+}(aq) + C(s)$$

ت)چون این گونه‌ها کاهنده هستند ، ترتیب نوشته شده مقایسهٔ قدرت کاهندگی است.

ث) چون از آنجا که B قوی‌ترین کاهنده است، پس $B^{۲+}$ ضعیف‌ترین اکسنده است و تمایل کمتری به گرفتن الکترون دارد.

۱۰۴ - گزینه ۳ در این واکنش عدد اکسایش قلع از ۲+ به صفر (در عنصر آزاد قلع در طرف فراورده) رسیده، یعنی یون قلع کاهش یافته است. پس حتما باید کروم اکسایش یابد، یعنی x باید کوچکتر از y باشد.

۱۰۵ - گزینه ۳ ابتدا معادلهٔ واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم:

$$۴Fe(s) + ۶H_۲O(l) + ۳O_۲(g) \rightarrow ۴Fe(OH)_۳(s) \quad e^- = ۱۲$$

$$Fe(OH)_۳ + ۳HCl(aq) \rightarrow FeCl_۳(aq) + ۳H_۲O(l)$$

$$۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۰} e^- \times \frac{۱mole^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} e^-} \times \frac{۴molFe(OH)_۳}{۱۲mole^-} \times \frac{۳molHCl}{۱molFe(OH)_۳} = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol\ HCl$$

$$[HCl] = \frac{۲ \times ۱۰^{-۴} mol}{۰/۱mol} = ۲ \times ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow [H^+ = ۲ \times ۱۰^{-۳} mol \cdot L^{-۱}]$$

$$pH = -log[H^۲] - \log ۲ \times ۱۰^{-۳} = ۲/۷$$

۱۰۶ - گزینه ۲ عبارت‌های(ب)،(پ)و(ث)درست‌اند.

چون فلز M به‌صورت یون $M^{۲+}$ وارد محلول الکترولیت یا قطرهٔ آب شده است، لذا فلز M از آهن کاهنده‌تر بوده است و اکسایش را انجام داده و آهن در نقش کاتد حفاظت شده است، بنابراین فلز M می‌تواند Zn باشد، ولی نمی‌تواند Sn باشد، پس شکل مربوط به آهن گالوانیزه است که در ساخت تانکر آب و کانال کولر کاربرد دارد.

۱۰۷ - گزینه ۲ ابتدا جرم تیغه‌ای که کاهش می‌یابد (Al) را حساب کرده، بعد جرم روی که افزایش می‌یابد را به‌دست می‌آوریم.

$$۲Al + ۳Zn^{۲+} \rightarrow ۲Al^{۳+} + ۳Zn$$

$$\text{جرم } Al \text{ مصرفی} : ۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳} e \times \frac{۱mole}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} e} \times \frac{۲molAl}{۶mole} \times \frac{۲۷gAl}{۱molAl} = ۴/۵gAl$$

$$\text{جرم } Zn \text{ تولیدی} : ۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۳} e \times \frac{۱mole}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳} e} \times \frac{۳molZn}{۶mole} \times \frac{۶۵gZn}{۱molZn} = ۱۶/۲۵gZn$$

$\frac{۳}{۴}Zn$ تولیدی بر روی Al می‌نشیند:

$$۱۶/۲۵gZn \times \frac{۳}{۴} = ۱۲/۱۸g$$

چون به اندازهٔ ۴/۵ گرم از جرم تیغهٔ Al کم می‌شود و از طرفی ۱۲/۱۸ گرم روی بر آن می‌نشیند، پس در مجموع جرم تیغه به اندازهٔ $۱۲/۱۸ - ۴/۵ = ۷/۶۸g$ افزایش می‌یابد.

۱۰۸ - گزینه ۲ عبارت‌های اول و دوم نادرست هستند. جنس آند و کاتد به کار رفته در سلول یکسان و از جنس گرافیت است. آلومینیم مذاب در کاتد تولید می‌شود.

۱۰۹ - گزینه ۴

$$۲Ag^+(aq) + Zn \rightarrow ۲Ag(s) + Zn^{۲+}(aq)$$

$$?g\ Zn \text{ مصرف شده} = ۱L \text{ محلول} \times \frac{۲/۲molAgNO_۳}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{۱molZn}{۲molAgNO_۳} \times \frac{۶۵gZn}{۱molZn} = ۷۱/۵gZn \text{ مصرف شده}$$

پس وقتی تیغه Zn را پس از زمان تقریباً طولانی (برای کامل شدن واکنش) از ظرف (۱) خارج می‌کنیم، تنها $۷۸ - ۷۱/۵ = ۶/۵$ گرم از آن باقی مانده است. و تمامی کاتیون‌ها Ag^+ در محلول (۱) مصرف شده و غلظت $[Ag^+]$ به صفر می‌رسد.

حال با وارد کردن باقی‌ماندهٔ تیغه $(۶/۵g)Zn$ در محلول شمارهٔ (۲) ببینیم چه اتفاقی می‌افتد:

$$Fe^{۲+}(aq) + Zn \rightarrow Fe(s) + Zn^{۲+}(aq)$$

$?gZn = ۱L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۲molFe^{۲+}}{۱L\ \text{محلول}} \times \frac{۱molZn}{۱molFe^{۲+}} \times \frac{۶۵gZn}{۱molZn} = ۱۳gZn$ مصرف می‌شود

این مقدار فلز Zn بیشتر از مقدار Zn باقی‌مانده ($۶/۵g$) است؛ پس کل تیغه Zn مصرف می‌شود و مقداری هم از کاتیون‌های $Fe^{۲+}$ باقی می‌ماند.

۱۱۰ - گزینه ۳ موارد آ و ت و ث درست هستند.

بررسی موارد:

آ) در واکنش سوختن متان ($CH_۴$)، کربن‌دی‌اکسید ($CO_۲$) تولید می‌شود. عدد اکسایش کربن در متان برابر (-۴) و در کربن‌دی‌اکسید ($+۴$) می‌باشد. بنابراین عدد اکسایش کربن ۸ واحد تغییر می‌کند.

$\underline{C}H_۴$ $\quad x + ۴ = ۰ \rightarrow x = -۴$

$\underline{C}O_۲$ $\quad y - ۴ = ۰ \rightarrow y = +۴$

ب) اغلب فلزها در واکنش با نافلزها، یک یا چند الکترون خود را به نافلز می‌دهند و اکسایش می‌یابند و به کاتیون تبدیل می‌شوند.

پ) اگر عدد اکسایش حداقل یک عنصر در یک واکنش تغییر کند، آن از نوع اکسایش ــ کاهش می‌باشد. چون عدد اکسایش هیچ‌یک از عناصر در واکنش تغییر نکرده است، پس از نوع اکسایش ــ کاهش نمی‌باشد.

$$۲\overset{+۱}{K}\overset{-۲}{O}\overset{+۱}{H} + \overset{+۱}{K_۲}\overset{+۶}{Cr_۲}\overset{-۲}{O_۷} \rightarrow \overset{+۱}{K_۲}\overset{+۶}{Cr}\overset{-۲}{O_۴} + \overset{+۱}{H_۲}\overset{-۲}{O}$$

ت) برای محاسبهٔ تعداد الکترون‌های مبادله شده می‌توانیم از رابطهٔ (

ضریب × زیروند × تغییر عدد اکسایش اکسنده یا کاهنده = الکترون مبادله شده) استفاده کرد؛ بنابراین در این واکنش ۱۲ مول الکترون مبادله شده است.

$$۴\overset{\bullet}{Fe} + ۳O_۲ + ۶H_۲O \longrightarrow ۴\overset{+۳}{Fe}(OH)_۳$$

$۳ \times ۱ \times ۴ = ۱۲$

ث) نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش به‌صورت همزمان رخ می‌دهند و نمی‌تواند تنها یکی از آن‌ها اتفاق بیفتد و باید هم از لحاظ بار و هم از لحاظ جرم موازنه باشند.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱	۱۷ - ۲	۳۳ - ۳	۴۹ - ۱	۶۵ - ۲	۸۱ - ۲	۹۷ - ۴
۲ - ۱	۱۸ - ۴	۳۴ - ۲	۵۰ - ۱	۶۶ - ۴	۸۲ - ۲	۹۸ - ۱
۳ - ۴	۱۹ - ۱	۳۵ - ۱	۵۱ - ۳	۶۷ - ۳	۸۳ - ۴	۹۹ - ۳
۴ - ۴	۲۰ - ۴	۳۶ - ۱	۵۲ - ۳	۶۸ - ۳	۸۴ - ۲	۱۰۰ - ۴
۵ - ۱	۲۱ - ۱	۳۷ - ۲	۵۳ - ۱	۶۹ - ۳	۸۵ - ۲	۱۰۱ - ۴
۶ - ۲	۲۲ - ۴	۳۸ - ۱	۵۴ - ۱	۷۰ - ۲	۸۶ - ۳	۱۰۲ - ۱
۷ - ۲	۲۳ - ۳	۳۹ - ۴	۵۵ - ۲	۷۱ - ۲	۸۷ - ۴	۱۰۳ - ۳
۸ - ۲	۲۴ - ۱	۴۰ - ۲	۵۶ - ۳	۷۲ - ۴	۸۸ - ۳	۱۰۴ - ۳
۹ - ۳	۲۵ - ۱	۴۱ - ۲	۵۷ - ۱	۷۳ - ۲	۸۹ - ۱	۱۰۵ - ۳
۱۰ - ۴	۲۶ - ۳	۴۲ - ۱	۵۸ - ۲	۷۴ - ۴	۹۰ - ۱	۱۰۶ - ۲
۱۱ - ۱	۲۷ - ۴	۴۳ - ۱	۵۹ - ۱	۷۵ - ۳	۹۱ - ۲	۱۰۷ - ۲
۱۲ - ۲	۲۸ - ۱	۴۴ - ۲	۶۰ - ۳	۷۶ - ۴	۹۲ - ۴	۱۰۸ - ۲
۱۳ - ۱	۲۹ - ۱	۴۵ - ۲	۶۱ - ۳	۷۷ - ۳	۹۳ - ۲	۱۰۹ - ۴
۱۴ - ۳	۳۰ - ۱	۴۶ - ۱	۶۲ - ۳	۷۸ - ۱	۹۴ - ۴	۱۱۰ - ۳
۱۵ - ۱	۳۱ - ۱	۴۷ - ۲	۶۳ - ۲	۷۹ - ۴	۹۵ - ۱	
۱۶ - ۴	۳۲ - ۳	۴۸ - ۳	۶۴ - ۲	۸۰ - ۱	۹۶ - ۳	