



ام اس بوک

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: اختصاصی ریاضی - ۲۰۲۱۲

۱- حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$

۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ برابر کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{5}{2}$

۳- تابع f با ضابطه $f(x) = (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه $(0, 9)$ در چند نقطه، ناپیوسته است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۴- ماکسیمم $y = (\log_v^f)^{\sin x}$ کدام است؟

- ① $\log_v^f$ ② $\frac{f}{v}$ ③ ۱ ④ $\log_v^v$

۵- تابع $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ در کدام بازه وارون پذیر است؟

- ① $[-1, 0]$ ② $[2, 4]$ ③ $(-\infty, 2)$ ④ $[2, +\infty)$

۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

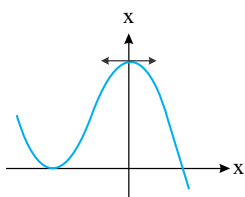
- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۷- اگر $f(x) = x^2 \sqrt{x}$ ، مقدار مشتق تابع $g(x) = (f \circ f')(x)$ در نقطه $x = \sqrt[11]{\frac{4}{25}}$ کدام است؟

- ① $\frac{115}{8}$ ② $\frac{275}{8}$ ③ $\frac{250}{16}$ ④ $\frac{275}{16}$

۸- در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 4$ رسم شده است، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

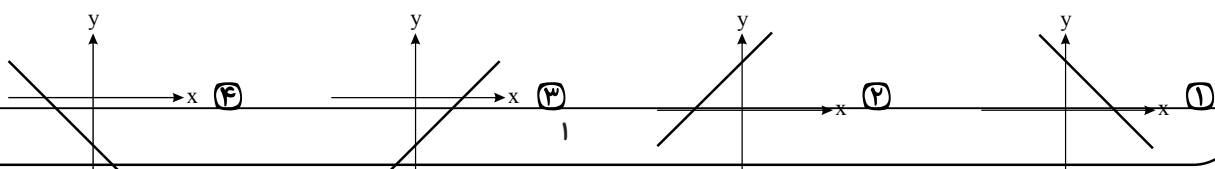
- ① $(-3, 1)$ ② $(-6, 1)$ ③ $(-3, 0)$ ④ $(-6, 0)$



۹- خط $y = 3x - 4$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بر منحنی تابع $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) + f^2(x)}{x^4 - 1}$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{3}{4}$

۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x(x-1) & |x| \leq 1 \\ g(x) & |x| > 1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. نمودار g کدام می‌تواند باشد؟



۱۱- در تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \times (x+1)$ نقطه $x=2$ چه نقطه‌ای است؟

- ① ماکزیمم نسبی و مشتق پذیر ② ماکزیمم نسبی و مشتق ناپذیر ③ مینیمم نسبی و مشتق پذیر ④ مینیمم نسبی و مشتق ناپذیر

۱۲- اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ و $\cos 2\alpha = \frac{1}{m-1}$ محدوده m کدام است؟

- ① $(1, +\infty)$ ② $\mathbb{R} - (0, 1]$ ③ $(1, 3)$ ④ $\mathbb{R} - [0, 3]$

۱۳- کدام تابع زیر مجانب قائم دارد؟

- ① $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ ② $y = \frac{[\frac{x}{2}]}{x-1}$ ③ $y = \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ ④ $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

۱۴- در یک مثلث اندازه یک زاویه 30° و تفاضل دو زاویه دیگر بر حسب رادیان $\frac{\pi}{10}$ است. اندازه زاویه بزرگتر چند رادیان است؟

- ① $\frac{7\pi}{15}$ ② $\frac{14\pi}{15}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{3}$

۱۵- در چه نقاطی از بازه $(-\pi, 3\pi)$ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \cos x$ موازی محور x ها است؟

- ① $x = 0, \pi$ ② $x = 0, \pi, 2\pi$ ③ $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ④ $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

۱۶- حاصل عبارت $A = \left| \frac{\sin x - \cos x}{2} \right| + \frac{\sin x + \cos x}{2}$ که در آن $x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ می‌باشد کدام است؟

- ① $\sin x$ ② $\cos x$ ③ $\sin x + \cos x$ ④ $\cos x - \sin x$

۱۷- اگر خطوط $x = -2$ و $y = 3$ مجانب‌های تابع $y = \frac{ax+3}{x+b}$ باشند، a و b کدام است؟

- ① $b = -2, a = 3$ ② $b = 2, a = 3$ ③ $b = 3, a = 2$ ④ $b = -3, a = -2$

۱۸- اگر $\tan(2\alpha + \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} + 1$ و $\tan(2\alpha - \frac{\beta}{3}) = \sqrt{3} - 1$ باشد، $\tan \frac{2\beta}{3}$ برابر است با:

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

۱۹- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۰- مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{-\cos 6x}}{\sqrt{\pi - 4x}}$ کدام است؟

- ① $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ ④ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

۲۱- اگر $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = k_1$ و $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = k_2$ کدام رابطه درست است؟

- ① $k_2 - k_1 = bc$ ② $k_1 - k_2 = bc$ ③ $k_1 + k_2 = bc$ ④ $k_1 + k_2 = -bc$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1381} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و آنگاه $a + b + c + d$ کدام است؟

- ① 1381 ② 1382 ③ 1384 ④ 1383

۲۳- تصویر قائم بردار $(6, -3, 0)$ روی امتداد بردار $(-2, -1, 2)$ کدام بردار است؟

- ① $(2, -1, -2)$ ② $(-2, 1, 2)$ ③ $(4, -2, -4)$ ④ $(2, 3, -1)$

۲۴- اگر بردارهای $\vec{a}(1, m, 1)$ و $\vec{b}(-1, m-1, 1)$ با بردار $\vec{c}(1, -1, 1)$ در یک سطح واقع نشود، m کدام عدد نمی تواند باشد؟

- ① ۴ ② ۳ ③ -۱ ④ هر سه

۲۵- دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ و خط $3x + 4y - 5 = 0$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

- ① خط بر دایره مماس است. ② در هیچ نقطه ای یکدیگر را قطع نمی کنند.

- ③ خط در دو نقطه دایره را قطع می کند. ④ خط از مرکز می گذرد.

۲۶- دو نقطه‌ی $A(4, -2)$ و $B(-2, 6)$ مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آنها پاره خط AB با زاویه قائم دیده شود کدام است؟

- ① $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ ② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 36$ ④ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$

۲۷- حاصل ضرب ریشه های معادله $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x^2 & 1 & 4 & 9 \\ x & 1 & 2 & -3 \\ x^3 & 1 & 8 & -27 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- ① ۳ ② -۶ ③ ۶ ④ -۳

۲۸- اگر به تمام درایه های ستون دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix}$ ، یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان ماتریس اولیه، کدام عدد اضافه می شود؟

- ① -۳ ② -۲ ③ ۳ ④ ۶

۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^n کدام است؟

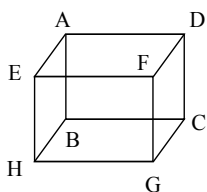
- ① $2^{n-1}A$ ② 2^nA ③ $2^{n+1}A$ ④ I

۳۰- اگر $2A + 3I = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ، دترمینان $3A - A^2$ کدام است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ -۴ ④ ۴

۳۱- اگر $a \cdot (3b) = \sqrt{3(b-a)} \times (b-2a)$ زاویه بین دو بردار غیر صفر a و b چقدر است؟

- ① 30° ② 45° ③ 60° ④ 90°



۳۲- مکعب مقابل به ضلع ۲ مفروض است. اندازه بردار $\vec{AG} \times \vec{CF}$ کدام است؟

- ① $2\sqrt{6}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ ۱۶ ④ ۸

۳۳- اگر A ماتریس مربعی باشد به طوری که $A^2 - A + I = \overline{O}$ ، ماتریس A^{101} برابر کدام است؟

- ① A ② $-A$ ③ $I - A$ ④ $A - I$

۳۴- چند نقطه در صفحه وجود دارد به طوری که از اضلاع یک مستطیل به طول 5 cm و عرض 3 cm در آن صفحه به یک فاصله باشند؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۳۵- اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times 5}$ و $C = [c_{ij}]_{6 \times 1}$ حاصل ضرب CAB تعریف شده باشد، آن گاه mn چقدر است؟

- ① ۳۵ ② ۵۰ ③ ۶۰ ④ ۷۰

۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه حاصل $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20}$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 2^{20} & 3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 20 & 3^{20} \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 400 & 900 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 20 & 630 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

۳۷- جواب های معادله $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- ① $1, -4$ ② $1, 4$ ③ $1, 5$ ④ $2, 5$

۳۸- حاصل $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}$ همواره با کدام یک از دترمینان های زیر برابر است؟

- ① $\begin{vmatrix} a^2 & b & c^2 \\ a & b & 0 \\ b & 0 & bc \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c \\ a & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} a & b^2 & c^2 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & bc \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} a & b^2 & c^2 \\ 1 & b & 0 \\ a & 0 & ac \end{vmatrix}$

۳۹- اگر $a \cdot k = a \cdot (i - j) = a \cdot (k - 2i + 3j) = -1$ اندازه بردار a کدام است؟

- ① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{21}$ ④ $\sqrt{26}$

۴۰- نقطه A به عرض -1 و با طول مثبت روی دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ قرار دارد. معادله خط d که از نقطه A بگذرد و بر دایره مماس باشد، کدام است؟

- ① $4x + 3y = 15$ ② $3x - 4y = 15$ ③ $3x + 4y = 15$ ④ $4x - 3y = 15$

۴۱- در رابطه هم نهشتی به پیمانه 11 ، عدد 5^{10} به کدام دسته هم نهشتی تعلق دارد؟

- ① $[1]$ ② $[3]$ ③ $[5]$ ④ $[7]$

۴۲- معادله سیاله خطی $15x + 14y = 1050$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5

۴۳- بیشترین اندازه یک گراف از مرتبه 15 برای آنکه حتماً بیش از دو بخش از هم جدا داشته باشد کدام است؟

- ① 17 ② 13 ③ 78 ④ 12

۴۴- با ارقام 1 و 2 و 3 و 4 و 5 چند عدد سه رقمی می توان نوشت که رقم دهگان و صدگان آن فرد باشد؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).

- ① 60 ② 18 ③ 36 ④ 45

۴۵- در تقسیم a بر b ، باقیمانده دو واحد از خارج قسمت کم تر است. اگر 2 واحد از مقسوم علیه کم کنیم، 7 واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقیمانده صفر می شود. مقدار b کدام یک از موارد زیر می تواند باشد؟

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8

۴۶- دستگاه معادلات زیر در مجموعه اعداد طبیعی دارای چند جواب است؟

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ y_1 y_2 y_3 = 7^3 \times 2^4 \end{cases}$$

- ① 900 ② 156 ③ 150 ④ 31

۴۷- اگر n عدد صحیح و $d = (n^2 - 4n, 5n + 6)$ عددی اول باشد، آنگاه بزرگ ترین مقدار d کدام است؟

- ① 5 ② 7 ③ 11 ④ 13

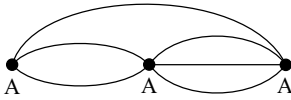
۴۸- اگر $5a + 3b \mid 11$ آن گاه باقی مانده تقسیم $27a - 8b$ بر ۱۱ کدام است؟

- ① ۰ ② ۳ ③ ۵ ④ ۸

۴۹- در یک گراف ۴- منتظم، اندازه گراف از ۷ برابر مرتبه آن ۲۵ واحد کمتر است. مجموع مرتبه و اندازه گراف کدام است؟

- ① ۱۰ ② ۱۵ ③ ۲۰ ④ ۲۵

۵۰- در شکل مقابل به چند طریق می توان از A به C رفت و برگشت به طوریکه مسیر رفت و برگشت یکسان نباشد؟



- ① ۴۲ ② ۴۹ ③ ۳۶ ④ ۳۰

۵۱- چند عضو از مجموعه $S = \{70, 71, \dots, 110\}$ نه مضرب ۳ و نه مضرب ۷ هستند؟

- ① ۲۰ ② ۲۴ ③ ۲۵ ④ ۲۷

۵۲- روی خط $130 = 7x + 5y$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

- ① ۳ ② ۵ ③ ۷ ④ ۹

۵۳- با حروف واژه Interest چند کلمه هشت حرفی می توان ساخت که در آن هیچ دو حرف یکسانی کنارهم قرار نگرفته باشند؟

- ① ۵۱۲۰ ② ۵۰۹۰ ③ ۵۷۶۰ ④ ۵۸۰۰

۵۴- اگر $1! + 2! + 3! + \dots + 1400! \equiv 1x \pmod{45}$ ، آن گاه x کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ① $15k + 3$ ② $45k + 3$ ③ $15k + 1$ ④ $45k + 1$

۵۵- در بسط $(a + b + c)^{10}$ چند جمله متمایز ظاهر می شود؟

- ① ۵۵ ② ۶۶ ③ ۲۸ ④ ۷۸

۵۶- سنگی را از بالای ساختمانی به ارتفاع h و در شرایط خلاء بدون سرعت اولیه رها می کنیم سرعتش در ارتفاع $\frac{h}{2}$ برابر است با:

- ① $\sqrt{gh}$ ② $\frac{\sqrt{2gh}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{gh}}{2}$ ④ $\sqrt{\frac{gh}{2}}$

۵۷- جسمی به جرم m توسط نیروی خالص F بروی سطح افقی بدون اصطکاک از حال سکون به حرکت در آمده و پس از t ثانیه مسافت $1m$ را طی می کند. اگر $0.5kg$ به جرم آن افزوده شود و توسط همان نیروی خالص F بر روی همان سطح از حال سکون به راه افتاده و پس از t ثانیه مسافت $0.5m$ را طی می کند. m چقدر بوده است؟

- ① $0.5kg$ ② $0.2kg$ ③ $1kg$ ④ $0.75kg$

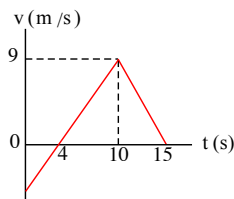
۵۸- دامنه یک نوسانگر وزنه - فنر $4cm$ است. اگر جرم وزنه 20 گرم و ثابت فنر $\frac{32}{m}$ باشد، بیشینه سرعت نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

- ① 0.4 ② 0.8 ③ 1.2 ④ 1.6

۵۹- وزنه ای به جرم 50 گرم به نخ سبکی بسته شده و با شتاب $\frac{2m}{s^2}$ در راستای قائم به سمت بالا کشیده می شود. بزرگی نیروی کشش نخ در این شرایط چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ① 0.1 ② 0.3 ③ 0.6 ④ 1.2

۶۰- نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 15s$ چند متر بر مجذور ثانیه است؟



۰٫۶ (۲)

۰٫۴ (۱)

۱ (۴)

۰٫۸ (۳)

۶۱- دو متحرک از حال سکون با شتاب‌های $2 m/s^2$ و $8 m/s^2$ از نقطه‌ی A در مسیر مستقیم به مقصد نقطه‌ی B هم‌زمان به حرکت در می‌آیند. اگر اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به مقصد ۳ ثانیه باشد، AB چند متر است؟

۷۲ (۴)

۵۴ (۳)

۴۸ (۲)

۳۶ (۱)

۶۲- دو ذره متحرک در دو راستای عمود برهم (محورهای x و y) حرکت می‌کنند و مکان آن‌ها بر حسب زمان در SI از رابطه‌های $x = -10t + 40$ و $y = 20t - 30$ به دست می‌آید. کمترین فاصله میان دو متحرک چند متر می‌شود؟

$5\sqrt{10}$ (۴)

$10\sqrt{5}$ (۳)

۲۵ (۲)

۵۰ (۱)

۶۳- از پایین سطح شیب‌داری جسمی با سرعت $4 \frac{m}{s}$ به طرف بالای سطح حرکت داده می‌شود. جسم 0.5 ثانیه بعد تغییر جهت می‌دهد و ۱ ثانیه پس از تغییر جهت با سرعت $2 \frac{m}{s}$ به پایین سطح شیب‌دار می‌رسد. اندازه شتاب متوسط حرکت جسم در کل حرکت رفت و برگشت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۶۴- یک ذره روی محیط دایره‌ای به قطر $90 cm$ در یک سو می‌چرخد. اگر اندازه جابه‌جایی این ذره $45 cm$ باشد، مسافت پیموده‌شده توسط ذره بر حسب سانتی‌متر کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

165π (۴)

135π (۳)

105π (۲)

75π (۱)

۶۵- دو گلوله به فاصله‌ی زمانی یک ثانیه از نقطه‌ای به ارتفاع h در شرایط خلأ رها می‌شوند. اگر بیشترین فاصله‌ی بین آن‌ها در طول حرکت به 45 متر برسد، ارتفاع h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱۴۵ (۴)

۱۲۵ (۳)

۱۱۰ (۲)

۸۰ (۱)

۶۶- فرض کنید بر جسمی به جرم 0.5 دو نیروی $\vec{F}_1 = -2\vec{F}_2$ و $\vec{F}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ اثر می‌کنند. بزرگی شتاب حرکت این جسم چقدر است؟ (تمام مقادیر در SI هستند.)

۱۵ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۱ (۱)

۶۷- وزنه‌ای در داخل آسانسوری که با شتاب $4 m/s^2$ رو به پایین شروع به حرکت کرده است به فنری آویزان شده و به این وسیله آن را $1.5 cm$ می‌کشد نسبت به حالت عادی‌اش اگر فنر را $1 cm$ فشرده و رها کنیم، در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۳ برابر انرژی جنبشی نوسانگر است، سرعت نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 m/s^2$)

۲ (۴)

۱ (۳)

0.2 (۲)

0.1 (۱)

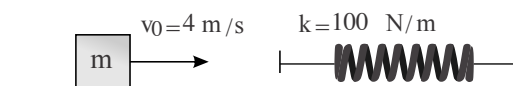
۶۸- وزنه‌ای به جرم $1 kg$ مطابق شکل با سرعت $4 m/s$ به فنری سبک برخورد کرده و طوری به آن می‌چسبد و همراه با آن نوسان می‌کند. مکان نوسانگر در زمان $\frac{\pi}{30}$ کدام است؟ (اصطکاک ناچیز) (لحظه $t = 0$ لحظه برخورد جسم با فنر است)

$0.2m$ (۲)

$0.1m$ (۱)

$0.4m$ (۴)

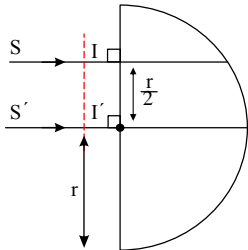
$0.3m$ (۳)



۶۹- اگر توان خروجی یک منبع صوت $10^{-12} \times 4$ وات باشد و مساحت عمود بر آن در SI به صورت $A = 4t^2$ با زمان تغییر کند. در چه زمانی بر حسب ثانیه تراز $+20$ دسی بل است؟ (تراز مرجع شدت صوت $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ است)

- ① ۰٫۱ ② ۰٫۰۱ ③ ۱۰ ④ ۱۰۰

۷۰- در شکل مقابل یک محیط شفاف به شکل نیم دایره داریم. دو پرتو SI و $S'I'$ که از هوا وارد محیط شفاف می شود. پس از خروج از محیط شفاف با یکدیگر چه زاویه ای می سازند؟



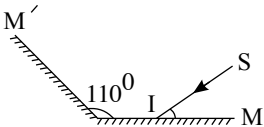
(شعاع نیم دایره r و ضریب شکست محیط شفاف نسبت به هوا $\sqrt{2}$ است.)

- ① ۱۵
② ۳۰
③ ۴۵
④ ۶۰

۷۱- پس از گذشت ۲ شبانه روز، تعداد هسته های واپاشی شده یک ماده پرتوزا، به $\frac{15}{16}$ مقدار اولیه رسیده است. نیمه عمر این ماده چند ساعت است؟

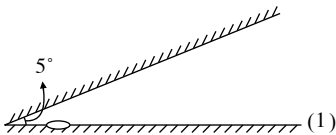
- ① ۶ ② ۱۲ ③ ۲۴ ④ ۴۸

۷۲- در شکل مقابل پرتو SI به آینه M می تابد و پس از برخورد به آینه M' بازتاب می شود. پرتو نور چند درجه نسبت به جهت اولیه (SI) منحرف می شود؟



- ① ۴۰ ② ۷۰
③ ۱۱۰ ④ ۱۴۰

۷۳- در شکل مقابل پرتو SI عمود بر آینه (۱) از داخل حفره ای که روی این آینه وجود دارد، وارد فضای میان دو آینه تخت متقاطع می شود. این پرتو پس از چند بازتابش از میان دو آینه که طول نامحدود دارند، خارج می شود؟

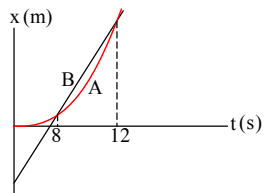


- ① ۱۹ ② ۲۰
③ ۱۷ ④ ۲۱

۷۴- تراز شدت صوت در فاصله d از یک منبع صوت 50 دسی بل است اگر 80 تا از این منبع صوت ها که مشابه هستند، با هم صوت را تولید کنند در فاصله $4d$ از آن ها تراز شدت صوت چند دسی بل می شود؟ ($\log 2 = 0.3$ و دامنه ثابت فرض می شود.)

- ① ۶۰ ② ۵۷ ③ ۴۳ ④ ۷۰

۷۵- شکل مقابل نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B را نشان می دهد، که فاصله آن ها در مبدأ زمان برابر x_0 است. چند ثانیه بعد از لحظه $t = 0$ سرعت دو متحرک یکسان می شود؟ (نمودار متحرک A قسمتی از یک سهمی است.)

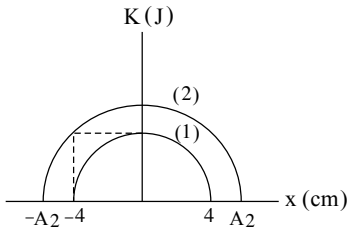


- ① ۶٫۵ ② ۷
③ ۱۰ ④ ۸٫۵

۷۶- دو سر سیمی ثابت است. یک موج می تواند در هر 0.4 ثانیه نصف طول این سیم را طی کند. اگر سیم را به ارتعاش وادار کنیم، در طول سیم ۴ گره تشکیل می شود. بسامد نوسان سیم چند هرتز است؟

- ① ۱٫۸۷۵ ② ۲٫۵ ③ ۳٫۷۵ ④ ۵۰

۷۷- نمودار انرژی جنبشی بر حسب مکان دو دستگاه جرم - فنر مشابه (۱) و (۲) که روی سطح افقی بدون اصطکاکی به ترتیب با دامنه‌های $A_1 = 4\text{ cm}$ و A_2 در حال نوسان هستند، مطابق شکل است. اگر در مکان $x = -4\text{ cm}$ انرژی پتانسیل (۲)، ۳ برابر انرژی پتانسیل دستگاه جرم فنر دستگاه (۱) باشد، A_2 چند cm است؟



- ① ۶
② ۸
③ ۱۲
④ ۱۶

۷۸- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h از سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود. اگر این گلوله فاصله $\frac{5}{9}h$ پایانی مسیر حرکتش را در مدت 1 s طی کند، تندی برخورد گلوله به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ① ۱۵ ② ۲۰ ③ ۲۵ ④ ۳۰

۷۹- ذره‌ای با شتاب ثابت روی خط راست در حرکت است. جابه‌جایی ۲۵ متر را در ۵ ثانیه اول و جابه‌جایی ۶۴ متر را در ۴ ثانیه پنجم حرکتش می‌پیماید. شتاب حرکت آن چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

- ① $\frac{31}{22}$ ② $\frac{22}{31}$ ③ $\frac{13}{19}$ ④ $\frac{19}{13}$

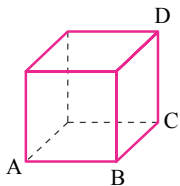
۸۰- دو آونگ A و B در یک نقطه روی سطح زمین نوسان می‌کنند. در مدت زمانی که آونگ A ، ۶ نوسان انجام می‌دهد آونگ B ، ۵ نوسان انجام می‌دهد. اگر طول آونگ A و B به ترتیب L_A و L_B باشد، حاصل $\frac{L_A + L_B}{L_A}$ چقدر است؟

- ① $\frac{25}{61}$ ② $\frac{61}{25}$ ③ $\frac{25}{36}$ ④ $\frac{36}{25}$

۸۱- شخصی در فاصله d_1 از چشمه صوتی قرار دارد. اگر 19.5 متر از چشمه صوت دور شود، تراز شدت صوت 32 دسی‌بل کاهش می‌یابد. d_1 چند متر است؟ ($\log 2 = 0.3$)

- ① ۲۰ ② ۰.۵ ③ ۶۰ ④ ۷۸۰

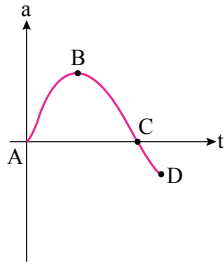
۸۲- مطابق شکل متحرکی با تندی ثابت v مسیر $ABCD$ را طی می‌کند. سرعت متوسط در این جابه‌جایی کدام است؟ (هر ضلع مکعب L فرض می‌شود).



- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}v$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}v$ ③ $4v$ ④ $3v$

۸۳- متحرکی از حال سکون شروع به حرکت با شتاب ثابت می‌کند و مسیر مستقیمی به طول d را طی می‌کند. نسبت زمانی که $\frac{d}{n}$ آخر مسیر را طی می‌کند به $\frac{d}{n}$ اول مسیر کدام گزینه است؟

- ① $1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ ② $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ③ $\sqrt{n}$ ④ $\sqrt{n} + 1$



۸۴- در شکل مقابل بیشترین سرعت و بیشترین فاصله از مبدأ کدام است؟ (فرض کنید $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$)

① C و D

② B و C

③ C و C

④ B و D

۸۵- دو متحرک A و B با معادله‌های مکان - زمان $x_A = 2t$ و $x_B = 6\pi \sin(t)$ در واحد SI از یک نقطه و هم‌زمان شروع به حرکت می‌کنند. متحرک B پس از طی مسافت 36π متر متوقف می‌شود. در طی حرکت، چند بار این دو متحرک از کنار یکدیگر عبور می‌کنند؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۸۶- گلوله‌ای رو به بالا پرتاب می‌شود و پس از رسیدن به بالاترین نقطه مسیر روبه پایین باز می‌گردد اگر جرم گلوله 3 kg و نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت آن 6 N باشد زمان بالا رفتن گلوله چند برابر زمان پایین آمدن آن است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

① $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ② $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$

۸۷- گلوله‌ای را با سرعت v به‌طور عمودی به‌سمت بالا پرتاب کرده و گلوله با نصف سرعت اولیه به محل اولیه خود بازمی‌گردد. نیروی مقاومت هوا با فرض ثابت بودن چند برابر وزن است؟

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $(\sqrt{2} - 1)^2$ ④ $\sqrt{2} - 1$

۸۸- گلوله‌ای در هوا در راستای قائم از سطح زمین به بالا پرتاب می‌شود. بیشترین مقدار شتاب در چه نقطه‌ای است؟

① هنگام رسیدن به زمین ② در نقطه اوج ③ هنگام پرتاب ④ در همه‌جا برابر است.

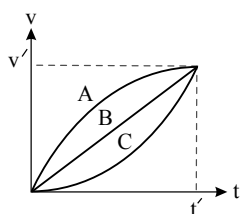
۸۹- در حرکت هماهنگ ساده با معادله $x = 0.1 \cos(20\pi t)$ در SI چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟
(الف) فاصله دو نقطه بازگشت 20 سانتی‌متر است.

(ب) در مدت یک ثانیه پس از $t = 0$ انرژی جنبشی نوسانگر 20 مرتبه بیشینه می‌شود.

(ج) حداقل $\frac{1}{40}$ ثانیه طول می‌کشد تا از انرژی جنبشی بیشینه به انرژی پتانسیل بیشینه برسد.

(د) شتاب متوسط در بازه زمانی $0 < t < \frac{1}{20}\text{ s}$ صفر است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴



۹۰- با توجه به نمودار مقابل کدام گزینه درست است؟ (بازه زمانی را برای هر ۳ متحرک برابر صفر تا t' فرض می‌کنیم)

① $v_{avA} = v_{avB} = v_{avC}$

② $a_{avA} > a_{avB} > a_{avC}$

③ $v_{avC} < \frac{v'}{2} < v_{avA}$

④ $\Delta a_A < 0, \Delta a_C = 0$

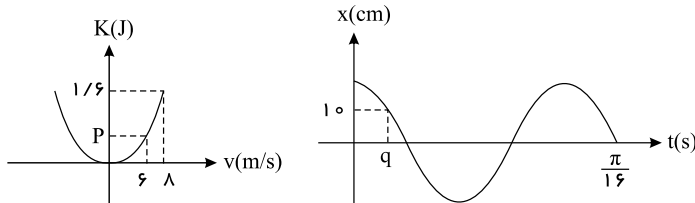
۹۱- جعبه چوبی به جرم m از روی سطح شیب‌داری لیز می‌خورد و در یک مسیر افقی قرار می‌گیرد. اگر 30 متر ابتدای مسیر روغن ریخته باشد و ضریب اصطکاک جنبشی آن 0.3 باشد و بقیه مسیر ضریب اصطکاک جنبشی معادل با 0.6 داشته باشد و در ابتدای مسیر افقی سرعت جسم $30 \frac{m}{s}$ باشد تا لحظه‌ای که جسم می‌ایستد چند متر را روی سطح افقی پیموده است؟

① ۴۵ ② ۳۰ ③ ۴۰ ④ ۹۰

۹۲- سرعت متوسط متحرکی در ۴ ثانیه اول حرکت $\frac{4}{s}m$ و در ۶ ثانیه بعدی، $-\frac{6}{s}m$ است. سرعت متوسط متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ ۵ ④ -۵

۹۳- در شکل زیر، نمودارهای انرژی جنبشی - سرعت و مکان - زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده نشان داده شده است. به ترتیب p و q در SI کدامند؟

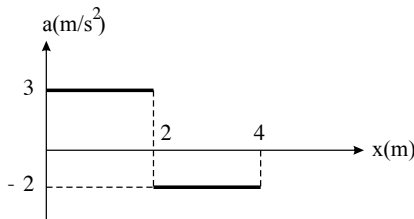


- ① $\frac{\pi}{120}, 0.9$
② $\frac{\pi}{80}, 1.2$
③ $\frac{\pi}{80}, 0.9$
④ $\frac{\pi}{120}, 1.2$

۹۴- رابطه مکان - زمان متحرکی بر مسیر مستقیم در SI به صورت $x = \frac{t^3}{2} + 2t$ است، شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 4s$ چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

- ① ۳ ② ۹ ③ 4.5 ④ 1.5

۹۵- متحرکی از مبدا مکان شروع به حرکت می‌نماید. اگر نمودار شتاب - مکان متحرک به صورت زیر



باشد، سرعت متحرک در مکان $x = 3m$ چند متر بر ثانیه است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$
③ $3\sqrt{2}$ ④ ۴

۹۶- اگر فاصله یک الکترون از هسته اتمی که در مدارهایی دور آن می‌چرخد ۴ برابر شود. بسامد آن چند برابر می‌شود؟

- ① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ③ ۸ ④ $\frac{1}{8}$

۹۷- گلوله A را از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها کرده‌ایم. پس از گذشت ۱ ثانیه گلوله B را از همان نقطه رها می‌کنیم. بیشترین فاصله دو گلوله چند متر خواهد بود؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ① ۲۵ ② ۳۰ ③ ۳۵ ④ ۴۵

۹۸- در یک تار دو سر بسته، ۶ گره ایجاد شده و تار با بسامد $200 Hz$ ارتعاش می‌کند. اگر در این حالت حداقل فاصله دو شکم متوالی ۴ سانتی‌متر باشد، بسامد سوم و طول موج اصلی تار کدام است؟

- ① $\lambda = 20cm, f = 120Hz$ ② $\lambda = 20cm, f = 40Hz$ ③ $\lambda = 40cm, f = 120Hz$ ④ $\lambda = 40cm, f = 40Hz$

۹۹- در آزمایش فوتوالکتریک، بسامد آستانه فلز $\frac{5}{8} \times 10^{15} Hz$ است. اگر انرژی هریک از فوتون‌های فرودی به فلز $4.125 \times 10^{-19} J$ باشد، بیشینه تندی فوتوالکتریک‌های خارج شده از سطح فلز چند متر بر ثانیه است؟ ($h = 4 \times 10^{-15} eVs$, $m_e = 9 \times 10^{-31} kg$, $e = 1.6 \times 10^{-19} C$)

- ① $\frac{1}{6} \times 10^6$ ② $\frac{1}{6} \times 10^6$ ③ $\frac{5}{7} \times 10^4$ ④ $\frac{5}{7} \times 10^5$

۱۰۰- دو گلوله با فاصله زمانی ۲ ثانیه از نقطه‌ای به ارتفاع h رها می‌شوند. اگر بیشترین فاصله بین آن‌ها در طول حرکت به ۱۰۰ متر برسد، ارتفاع h چند متر است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- ① ۱۱۰ ② ۱۲۵ ③ ۱۸۰ ④ ۲۴۵

۱۰۱ - عدد اکسایش اتم مشخص شده در کدام گونه، درست نشان داده شده است؟

- ① $-۲, \underline{O}F_۲$ ② $-۲, \underline{C}H_۳OH$ ③ $+۶, \underline{H}ClO_۳$ ④ $+۳, \underline{N}H_۴^+$

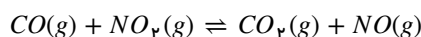
۱۰۲ - کدام مطلب نادرست است؟

- ① هرچه شعاع یون‌ها بزرگ‌تر باشد، انرژی شبکه‌ی بلور ترکیب یونی بیش‌تر است.
② دمای ذوب جامد یونی با انرژی شبکه‌ی بلور آن به طور کلی رابطه‌ی مستقیم دارد.
③ هر چه بار الکتریکی یون‌ها بیش‌تر باشد، انرژی شبکه‌ی بلور ترکیب یونی بیش‌تر است.
④ نیروی جاذبه‌ی بین یون‌ها در جامد یونی، در تمام جهت‌ها بین یون‌های ناهم‌نام مجاور وجود دارد.

۱۰۳ - کدام مولکول ناقطبی است؟

- ① HCl ② $CO_۲$ ③ $NH_۳$ ④ $CH_۳OH$

۱۰۴ - مقداری از گازهای CO و $NO_۲$ را یک ظرف سر بسته‌ی سه لیتری گرم می‌کنیم تا تعادل گازی:



برقرار شود اگر در شرایط آزمایش مقدار ۰.۴۵ مول گاز $CO_۲$ ، ۰.۹ مول گاز CO و ۰.۱۵ مول گاز $NO_۲$ در مخلوط گازی به حال تعادل وجود داشته باشد، ثابت این تعادل، کدام است؟

- ① ۲.۵ ② ۱۵ ③ ۱.۵ ④ ۲۵

۱۰۵ - کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

- آ) در سلول گالوانی، واکنش اکسایش - کاهش در مرز میان رسانای یونی و الکترونی روی می‌دهد.
ب) کاتد، الکترودی است که در آن، الکترون از رسانای الکترونی به رسانای یونی جریان می‌یابد.
پ) در سلول گالوانی روی - مس، الکتروود مس، قطب مثبت است و در آن اکسایش انجام می‌گیرد.
ت) دیواره متخلخل از مخلوط شدن سریع و مستقیم دو الکترولیت در سلول گالوانی جلوگیری می‌کند.

- ① آ، ب ② ب، پ ③ ب، پ، ت ④ آ، ب، ت

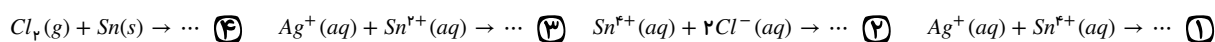
۱۰۶ - pH محلول ۰.۶ مولار هیدروکلریک اسید، ۴.۱ واحد کوچک‌تر از pH محلولی از هیپوکلرواسید ($HClO$) است. اگر درصد یونش محلول

هیپوکلرواسید، ۵ درصد باشد، غلظت مولی اولیه آن کدام است؟ ($\log ۲ = ۰.۳$ و $\log ۳ = ۰.۵$ و $\log ۵ = ۰.۷$)

- ① ۰.۰۱ ② ۰.۰۲ ③ ۰.۰۴ ④ ۰.۰۵

۱۰۷ - باتوجه به جدول زیر، کدام واکنش انجام پذیر بوده و بیشترین سلول E° را دارد؟

نیم واکنش	$E^\circ (V)$
$Sn^{4+}(aq) + 2e \rightleftharpoons Sn^{2+}(aq)$	۰٫۱۵
$Ag^+(aq) + e \rightleftharpoons Ag(s)$	۰٫۸
$Sn^{2+}(aq) + 2e \rightleftharpoons Sn(s)$	-۰٫۱۴
$Cl_2(g) + 2e \rightleftharpoons 2Cl^-(aq)$	۱٫۳۶



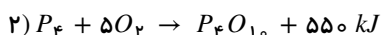
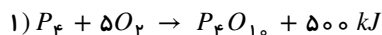
۱۰۸ - در کدام گزینه عدد اکسایش منگنز +۶ است؟



۱۰۹ - در مورد واکنش $2A_{(s)} + B_{(g)} \rightarrow 2AB_{(s)}$ $\Delta H < 0$ کدام مطلب نادرست است؟

- ① واکنش گرمازا است. ② با کاهش سطح انرژی همراه است. ③ فاصله واکنش دهنده ها تا قله نمودار کمتر از فاصله فراورده ها تا قله نمودار است. ④ بدون نیاز به انرژی فعال سازی انجام می گیرد.

۱۱۰ - با توجه به واکنش های زیر که مربوط به سوختن فسفر سفید «۱» و فسفر قرمز «۲» است؛ کدام مطلب صحیح می باشد؟



- ① پایداری فسفر سفید کمتر از فسفر قرمز است. ② تبدیل فسفر سفید به فسفر قرمز گرماگیر است. ③ ΔH واکنش تبدیل فسفر سفید به فسفر قرمز -50 kJ است. ④ سطح انرژی فسفر سفید بیشتر از فسفر قرمز است.

۱۱۱ - pH محلولی که غلظت یون هیدرونیوم آن $10^{-5} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ است، چند است؟



۱۱۲ - غلظت یون هیدرونیوم در محلول $0.1M$ کدام اسید زیر کمتر است؟ (دما یکسان فرض کنید.)



۱۱۳ - شمار مول یون هیدرونیوم موجود در 100 میلی لیتر محلول اسید HA با $pH = 2.2$ ، با شمار مول اکسیژن موجود در چند گرم کربن دی اکسید

برابر است؟ ($O = 16, C = 12 : g \cdot mol^{-1}, \log 3 = 0.5$)

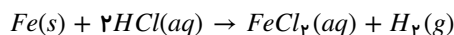


۱۱۴ - یک تیغه آلومینیم را در محلول مس II سولفات قرار می دهیم. پس از مدتی 135 گرم آلومینیم مصرف می شود. جرم مس تولید شده برحسب گرم

و تعداد الکترون های مبادله شده میان اتم های آلومینیم و یون های مس کدام است؟ ($Cu = 64, Al = 27 : g \cdot mol^{-1}$)



۱۱۵ - یک قطعه فلز آهن در محلولی از HCl به حجم یک لیتر قرار داده شده است. اگر پس از پایان واکنش 11.2 گرم از جرم قطعه آهنی کاسته شده باشد، pH محلول اسید چقدر بوده است؟ ($Fe = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)



۰٫۸ (۴)

۰٫۴ (۳)

۰٫۶ (۲)

۰٫۲ (۱)

۱۱۶ - کدام گزینه عبارت ثابت تعادل واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ را به درستی نشان می دهد؟

$$K = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} \quad (۴)$$

$$K = \frac{[N_2][H_2]^3}{[NH_3]^2} \quad (۳)$$

$$K = [N_2][H_2]^3 \quad (۲)$$

$$K = [NH_3]^2 \quad (۱)$$

۱۱۷ - چه تعداد از عبارت های زیر در رابطه با ترفتالیک اسید صحیح می باشد؟

• از مونومرهای سازنده پلی اتیلن ترفتالات است.

• فرمول آن $C_8H_6O_4$ است.

• در ساختار آن ۲۳ پیوند کووالانسی و ۱۶ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

• مجموع اعداد اکسایش اتم های کربن در آن ۲- است.

• به طور مستقیم از نفت خام به دست نمی آید و از اکسایش پارازایلن تهیه می شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۱۸ - تمام عبارت های زیر نادرست هستند، به جز

(۱) با افزودن ترکیب سدیم فسفات به مواد شوینده، خاصیت ضد عفونی کنندگی و میکروب کشی آن ها افزایش می یابد.

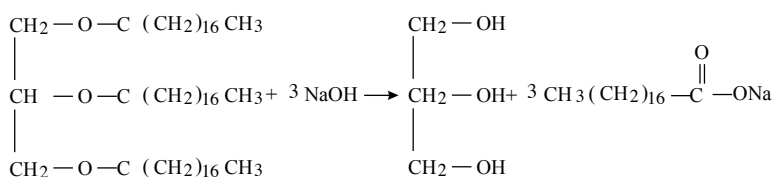
(۲) از صابون های گوگرددار برای از بین بردن جوش های صورت و قارچ های پوستی استفاده می شود.

(۳) صابون های طبیعی به دلیل داشتن افزودنی شیمیایی برای موهای چرب مناسب هستند.

(۴) برای افزایش میزان پاک کنندگی مواد شوینده در آب سخت، به آن ها ترکیبات کلردار اضافه می کنند.

۱۱۹ - 22.25 کیلوگرم از یک نمونه چربی با جرم مولی $890 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ را طبق واکنش زیر در محلول سدیم هیدروکسید کافی حرارت می دهیم. اگر بازده درصدی این واکنش 40% باشد، چند کیلوگرم صابون تولید خواهد شد؟

$$(Na = 23, O = 16, C = 12, H = 1 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$$



۲۹٫۸۲ (۱)

۱۳٫۷۷ (۲)

۸٫۵۲ (۳)

۹٫۱۸ (۴)

۱۲۰ - با توجه به شکل روبه‌رو از حل شدن ماده A در آب لامپ پر نوری حاصل شده است. چند مورد از عبارتهای زیر در رابطه با A همواره صحیح است؟ (الف) اگر A ماده‌ای اسیدی باشد، ثابت یونش آن بیشتر از ثابت یونش اسید موجود در ریواس است.



(ب) A می‌تواند لیتیم اکسید یا باریم اکسید باشد.

(پ) حل شدن تمام ترکیب‌های هیدروژن دار هالوژن‌ها در آب می‌تواند چنین شکلی را به وجود آورد.

(ت) با حل شدن A در آب، pH محلول حاصل همواره کمتر از ۷ خواهد بود.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۲۱ - کدام گزینه نادرست است؟

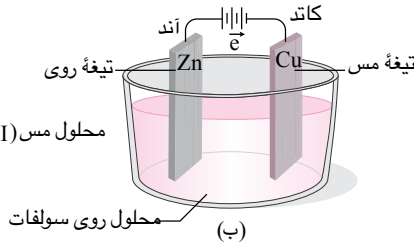
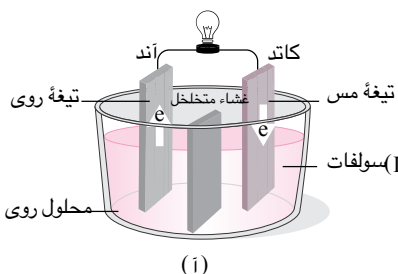
(۱) مقاومت گرمایی سیلیس بالا بوده و جامدی دیرگداز است.

(۲) در طبیعت هیچ یون تک‌اتمی از سیلیسیم و کربن یافت نشده است.

(۳) نقطه ذوب الماس از سیلیسیم، بالاتر است.

(۴) گرافیت، یک جامد کووالانسی با چینش سه‌بعدی اتم‌ها در کنار هم است.

۱۲۲ - با توجه به شکل‌های داده شده، چه تعداد از مطالب زیر نادرست‌اند؟ ($Zn = ۶۵$, $Cu = ۶۴$: $g \cdot mol^{-1}$)



• در شکل (آ) پایداری فراورده‌ها بیش‌تر از واکنش دهنده‌هاست.

• واکنش کلی انجام‌شده در سلول (ب) عکس واکنش کلی سلول (آ) می‌باشد.

• غلظت یون روی در هر دو سلول با گذشت زمان ثابت می‌ماند.

• با عبور مقدار یکسانی الکترون، جرم تیغه کاتد در هر دو سلول به مقدار یکسانی افزایش می‌یابد.

۳ (۴)

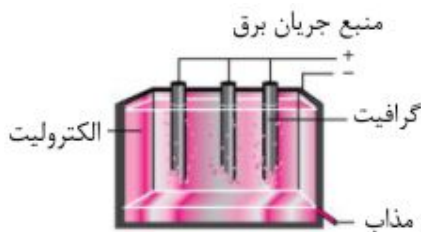
۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۲۳ - با توجه به شکل زیر که سلول الکترولیتی مربوط به فرایند هال را نشان می‌دهد، چه تعداد از مطالب زیر درست‌اند؟

($C = ۱۲$, $O = ۱۶$, $Al = ۲۷$, $Na = ۲۳$: $g \cdot mol^{-1}$)



• آند آن از جنس گرافیت است، که خود در واکنش نیز شرکت می‌کند.

• در کاتد فلز آلومینیم تولید می‌شود که چگالی بیش‌تری از الکترولیت مذاب دارد.

• در معادله موازنه‌شده واکنش، مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها برابر ۱۴ است.

• این واکنش از نگاه محیط زیست چندان مطلوب نیست.

• اگر ۱۶۲۰ کیلوگرم آلومینیم تولید شود، با الکترون‌های مبادله شده برای تولید آن می‌توان آلومینیم مذاب

۲۰۷ کیلوگرم فلز سدیم در سلول برق‌کافت سدیم کلرید مذاب تهیه نمود.

۴ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

۱۲۴ - مقداری فلز سدیم را وارد ۴۰۰ میلی‌لیتر آب می‌کنیم. اگر سرعت متوسط تولید گاز هیدروژن در این واکنش برابر با $2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد و pH محلول تولیدشده در این واکنش به تقریب ۳ برابر pH محلولی از HF با درجه یونش 1.25×10^{-3} و $K_a = 6.25 \times 10^{-8}$ باشد و واکنش با سرعت یکنواخت پیش رود، پس از گذشت چند ثانیه به پایان می‌رسد؟ (معادله واکنش موازنه نشده است و واکنش در دمای $25^\circ C$ رخ می‌دهد.)
 $Na(s) + H_2O(l) \rightarrow NaOH(aq) + H_2(g)$

- ① ۱٫۲۵ ② ۷۵ ③ ۴۸ ④ ۹۰

۱۲۵ - چند گرم اسید HA با ثابت یونش $K_a = 10^{-5} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ را باید در ۵۰۰ میلی‌لیتر آب حل کنیم تا محلولی با $pH = 2$ به دست آید؟
 $(HA = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})$

- ① ۶۰۰ ② ۳۰۰ ③ ۲۰۰ ④ ۱۰۰

۱۲۶ - مقداری صابونی جامد را در ۶ متر مکعب محلول که حاوی کلسیم کلرید است، حل می‌شود. اگر مقدار نمک خوراکی به دست آمده ۳۵۱ گرم باشد. غلظت کلسیم کلرید در محلول اولیه بر حسب ppm کدام است؟ (چگالی محلول را $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ در نظر بگیرید.)
 $(Na = 23, Ca = 40, Cl = 35.5 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$

- ① ۳۳۳ ② ۵۵٫۵ ③ ۱۱۱ ④ ۶۶۶

۱۲۷ - در تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید کدام گزینه نادرست است؟

- ① عدد اکسایش کربن حلقه بنزنی تغییر نمی‌کند.
 ② به ازای تبدیل هر مولکول پارازایلن به ترفتالیک اسید در مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن ۱۲ درجه افزایش می‌یابد.
 ③ مولکول $C_{10}H_8$ به $C_8H_6O_4$ تبدیل می‌شود.
 ④ از پتاسیم پرمنگنات به عنوان اکسنده استفاده می‌شود و عدد اکسایش منگنز کاهش می‌یابد.

۱۲۸ - نسبت مجموع اعداد اکسایش اتم‌های کربن در ویتامین ث ($C_6H_8O_6$) به بیشترین عدد اکسایش کربن در استون کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ ۲ ④ -۲

۱۲۹ - در یک ظرف ۵ لیتری با پیستون روان، تعداد مول هریک از مواد شرکت‌کننده در تعادل گازی $COCl_2 \rightleftharpoons CO + Cl_2$ برابر ۵ مول است. اگر حجم ظرف را به یک لیتر کاهش دهیم، غلظت تعادلی $COCl_2$ چند مولار می‌شود؟ ($\sqrt{41} \approx 6.4$)

- ① ۶٫۴ ② ۵٫۲ ③ ۷٫۳ ④ ۷٫۸

۱۳۰ - کدام گزینه نادرست است؟ ($O = ۱۶, Si = ۲۸ : g \cdot mol^{-1}$)

- ① ۳ گرم از سیلیس حاوی $۱۰^{۲۲} \times ۹۰۳$ اتم است.
- ② آهک و یخ خشک و Pt به ترتیب جامد یونی، جامد مولکولی و جامد فلزی هستند.
- ③ فاصله بین اتم‌های کربن در الماس کمتر از فاصله بین اتم‌های کربن در گرافیت می‌باشد.
- ④ سیلیس شامل شمار بسیار زیادی از اتم‌های سیلیسیم و اکسیژن با پیوندهای اشتراکی $Si - O - Si$ است.

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲

می دانیم: $\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۲ - گزینه ۱ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{2x+8})(x - \sqrt{2x+8})}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۳ - گزینه ۱ نکته: تابع $y = g(x) \cdot [f(x)]$ به ازای ریشه های $g(x)$ همواره پیوسته است.

عدد ۱- از داخل براکت خارج می شود و نقشی در نقاط ناپیوستگی ندارد. توابع براکتی در نقاطی که عبارت داخل براکت مقداری صحیح باشد، ناپیوسته می باشند، لذا داریم:

$$\left[\frac{1}{3}x \right] : \frac{1}{3}x = k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = 3k \rightarrow 0 < 3k < 9 \rightarrow 0 < k < 3 \rightarrow k = 1, 2 \rightarrow x = 3, 6$$

از طرفی چون تابع $y = (x-3)\left[\frac{1}{3}x - 1\right]$ است، در نتیجه تابع در نقطه $x = 3$ پیوسته می باشد چون ریشه ی ضریب جزء صحیح است و $x = 6$ تنها نقطه ناپیوستگی تابع است.

۴ - گزینه ۴ $0 = \log_v^1 < \log_v^4 < \log_v^v = 1$ می باشد، یک عدد بین صفر و یک توانش هرچقدر منفی تر باشد بزرگتر می شود و می دانیم

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ است پس منفی ترین مقدار توان برابر } -1 \text{ است.}$$

$$Max = (\log_v^f)^{-1} = \frac{1}{\log_v^f} = \log_f^v$$

۵ - گزینه ۱ در بازه ای که تابع صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، یک به یک بوده و وارون پذیر است.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+

تنها در بازه گزینه ی ۱ تابع اکید است (صعودی اکید).

۶ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos^2 x - 1}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(1 + \sin x) = 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

۷ - گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^1, \quad x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g(x) = (f \circ f')(x) = f(f'(x)) = (f'(x))^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}}$$

بنابراین:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}}$$

$$g'\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = g'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{5}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{8}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$$

۸ - گزینه ۳ چون نمودار تابع در نقطه $x = 0$ دارای ماکزیمم نسبی است، پس باید $f'(0) = 0$ باشد، یعنی داریم:

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

گزینه‌های ۱ و ۲ مردود هستند.

از طرفی چون نقطه مینیمم نسبی تابع روی محور طول‌ها قرار دارد، پس عرض نقطه مینیمم نسبی برابر صفر است. یعنی داریم:

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax \Rightarrow x(-3x + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{2a}{3}$$

$$f\left(\frac{2a}{3}\right) = 0 \Rightarrow -\left(\frac{2a}{3}\right)^3 + a\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} = -4 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \Rightarrow a^3 = -27 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow (a, b) = (-3, 0)$$

۹ - گزینه ۲ راه حل اول: نقطه‌ای به طول $x = 1$ روی خط مماس دارای عرض $y = -1$ است و چون نقطه تماس روی منحنی هم قرار دارد، پس $f(1) = -1$ است. از طرفی چون شیب خط

مماس در این نقطه برابر ۳ است، پس $f'(1) = 3$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + f^2(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)(f(x) + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)}{(x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = f'(1) \times \frac{f^2(1)}{2 \times 2} = f'(1) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

راه حل دوم: با هوییتال نیز می‌توانستیم حد داده شده را حل کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + f^2(x)}{x^2 - 1} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x)f'(x) + 2f(x)f'(x)}{2x} = \frac{2f^2(1)f'(1) + 2f(1)f'(1)}{2} = \frac{2(-1)^2(3) + 2(-1)(3)}{2} = \frac{3}{4}$$

۱۰ - گزینه ۱ لازم است تابع در نقاط $x = \pm 1$ پیوسته باشد. واضح است که $f(1) = 2$ و $f(-1) = 2$ پس در تابع g باید:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 2$$

این شرایط فقط در نمودار گزینه ۱ برقرار است.

۱۱ - گزینه ۴ در تابع $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m} \times g(x)$ اگر

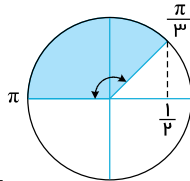
n فرد، m زوج، $n > m$ و $g(a) \neq 0$ و $g'(a)$ موجود باشد، آن گاه تابع در $x = a$ مشتق ناپذیر و از نوع بازگشتی و اکسترم نسبی می باشد.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \times (x+1), \quad g(x) = x+1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} \times g(x)$$

$x = 2$ مشتق ناپذیر و بازگشتی است.

$$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 + 1 = 3 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مینیمم نسبی است}$$

۱۲ - گزینه ۴ با توجه به دایره مثلثاتی داریم:



$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{3} < 2\alpha < \pi$$

$$\frac{\pi}{3} < 2\alpha < \pi \Rightarrow -1 < \cos 2\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < \frac{1}{m-1} < \frac{1}{2}$$

$$1) \frac{1}{m-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m-1} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2-m+1}{2(m-1)} < 0 \Rightarrow \frac{3-m}{2(m-1)} < 0 \Rightarrow m < 1 \text{ یا } m > 3 \quad (1)$$

$$2) \frac{1}{m-1} > -1 \Rightarrow \frac{1}{m-1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1+m-1}{m-1} > 0 \Rightarrow \frac{m}{m-1} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 1 \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $m < 0$ یا $m > 3$

پس محدوده m برابر است با $\mathbb{R} - [0, 3]$

۱۳ - گزینه ۳ گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: $D = [1, +\infty)$ و ریشه مخرج $x = 0$ است. تابع در هیچ همسایگی محذوف $x = 0$ تعریف نشده است.

گزینه ۲: $x = 1$ ریشه مخرج است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{x-1} = 0$$

گزینه ۳:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \pm\infty$$

گزینه ۴: $D = \mathbb{R} - (-1, 1)$ و تابع در هیچ همسایگی محذوف $x = 0$ تعریف شده نیست.

۱۴ - گزینه ۱ اگر در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ باشد آن گاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi &\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \\ \hat{B} - \hat{C} &= \frac{\pi}{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\hat{B} = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{10}$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{B} &= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{20} = \frac{25\pi}{60} + \frac{3\pi}{60} = \frac{28\pi}{60} = \frac{7\pi}{15} \\ \Rightarrow \hat{C} &= \frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{15} = \frac{25\pi}{30} - \frac{14\pi}{30} = \frac{11\pi}{30} \end{aligned}$$

بنابراین بزرگ‌ترین زاویه برابر $\frac{7\pi}{15}$ می‌باشد.

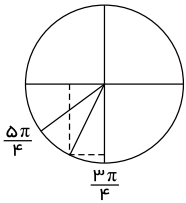
۱۵ - گزینه ۲ باید نقاطی را بیابیم که مشتق در آن‌ها صفر است:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (1)$$

$$-\pi < x < 3\pi \xrightarrow{(1)} x = 0, \pi, 2\pi$$

گزینه ۲ - ۱۶

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل مشخص است که در بازه $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ رابطه $\cos x > \sin x$ برقرار است، پس:



$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{\sin x - \cos x}{2} \right| + \frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{-\sin x + \cos x}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2} \\ A &= \frac{2\cos x}{2} = \cos x \end{aligned}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{x+b}, \quad x+b=0 \Rightarrow x=-b=-2 \Rightarrow b=2 \\ y &= \frac{a}{1} = a = 3 \end{aligned}$$

۱۸ - گزینه ۳ با کمی دقت معلوم است که:

$$(2\alpha + \frac{\beta}{3}) - (2\alpha - \frac{\beta}{3}) = \frac{2\beta}{3}$$

حال از طرفین تانژانت می‌گیریم.

$$\tan \left[(2\alpha + \frac{\beta}{3}) - (2\alpha - \frac{\beta}{3}) \right] = \tan(\frac{2\beta}{3}) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1}{1 + (\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{1+3-1} = \frac{2}{3}$$

۱۹ - گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)} = -(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$$

۲۰ - گزینه ۴ اگر فرض کنیم $x = \frac{\pi}{4} + t$ آن‌گاه $t \rightarrow 0^-$ و

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2t) = -\sin 2t$$

$$\cos 6x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 6t\right) = \sin 6t$$

$$\pi - 4x = \pi - 4\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = -4t$$

بنابراین حد موردنظر به صورت زیر درمی آید:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{-\sin 2t} - \sqrt{-\sin 6t}}{\sqrt{-4t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sin 2t}{t}} - \sqrt{\frac{\sin 6t}{t}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

۲۱ - گزینه ۳

$$k_1 = -abc, \quad k_2 = (a+1)(b)(c) \Rightarrow k_2 = abc + bc = -k_1 + bc \Rightarrow k_1 + k_2 = bc$$

۲۲ - گزینه ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به استقرا می توان نتیجه گرفت $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\Rightarrow A^{1381} = \begin{bmatrix} 1 & 1381 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a + b + c + d = 1383$$

۲۳ - گزینه ۲

نکته: تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار b از دستور $a' = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} b$ حاصل می شود.

$$a' = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} b = \frac{-9}{9} (2, -1, -2) = (-2, 1, 2)$$

۲۴ - گزینه ۳ در حل این تست ابتدا m را طوری بیابید که سه بردار هم صفحه باشند.

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (m+1, 0, -1-m)$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -m-1+0-1-m = -2m-2$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow -2m-2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

۲۵ - گزینه ۳ فاصله مرکز دایره تا خط را بدست می آوریم و با شعاع مقایسه می کنیم:

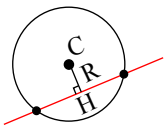
$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -2)$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 16 + 44}{4} = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow R = 4$$

$$\text{فاصله مرکز دایره تا خط} = CH = \frac{|3-8-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

$CH < R$ پس دایره و خط همدیگر را در دو نقطه قطع می کند.

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می آید.



۲۶ - گزینه ۲ مکان هندسی نقاطی که می توان از آن پاره خط AB را به صورت قائمه دید دایره ای است به قطر AB .

$$O = \frac{A+B}{2} = (1, 2), \quad AB = 2r = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow r = 5$$

$$\text{معادله دایره: } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

۲۷ - گزینه ۲ بدون آنکه نیازی به داشتن حاصل دترمینان داشته باشیم واضح است به ازای $x = 1$ ستون اول و دوم برابر است پس دترمینان صفر می شود به ازای $x = 2$ ستون اول و سوم برابر

است دترمینان صفر است و به ازای $x = -3$ ستون اول و چهارم برابر است و دترمینان صفر می شود پس ریشه های معادله مورد نظر به ترتیب $1, 2, -3$ بوده و حاصل ضرب ریشه ها

$$-6 = (-3) \times 2 \times 1 \text{ می باشد.}$$

۲۸ - گزینه ۱

$$\begin{vmatrix} 2 & 3+1 & 4 \\ 5 & a+1 & 7 \\ 3 & b+1 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{\text{تفکیک}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix}}_{|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}_{(-3)}$$

$$= |A| + (-3)$$

۲۹ - گزینه ۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2A$$

$$A^2 = 2A \xrightarrow{\times A} A^3 = 2A^2 = 2(2A) = 4A = 2^2 A$$

$$A^3 = 4A \xrightarrow{\times A} A^4 = 4A^2 = 4(2A) = 8A = 2^3 A$$

بنابراین:

$$A^n = 2^{n-1} A$$

۳۰ - گزینه ۴

$$2A + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 3A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow |A^2 - 3A| = 4$$

۳۱ - گزینه ۳

$$|\sqrt{3}(b-a) \times (b-2a)| = a \cdot (3b) \Rightarrow \sqrt{3} |(b-a) \times (b-2a)| = 3a \cdot b$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \left| \underbrace{b \times b - 2b \times a}_{+2a \times b} - a \times b + \underbrace{2a \times a}_{0} \right| = 3a \cdot b$$

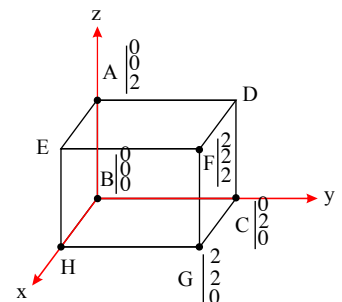
$$\frac{|a \times b|}{|a||b| \sin \theta} = \sqrt{3} \frac{a \cdot b}{|a||b| \cos \theta} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۳۲ - گزینه ۲ مکعب به ضلع ۲ را طوری در نظر می گیریم که نقطه B مبدأ مختصات بوده و یال های BA, BC, BH بر محورهای مختصات x, y, z باشند.

$$\begin{cases} \vec{AG} = G - A = (2, 2, -2) \\ \vec{CF} = F - C = (2, 0, 2) \end{cases} \times$$

$$\vec{AG} \times \vec{CF} = (4, -8, -4) = 4(1, -2, -1)$$

$$\Rightarrow |\vec{AG} \times \vec{CF}| = 4\sqrt{6}$$



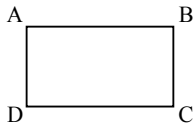
۳۳ - گزینه ۳

$$A^2 - A + I = \vec{0} \Rightarrow A^2 = A - I$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = (A - I) \times A = A^2 - A = (A - I) - A = -I \Rightarrow A^3 = -I$$

$$\Rightarrow A^{101} = (A^3)^{33} \cdot A^2 = (-I)^{33} \times (A - I) = -I(A - I) = I - A$$

۳۴ - گزینه ۱ فرض کنید $ABCD$ مستطیل موردنظر باشد. مکان هندسی نقاطی که از اضلاع AB و AD به یک فاصله باشد نیمساز زاویه A و مکان هندسی نقاطی که از اضلاع CD و BC به یک فاصله باشد نیمساز زاویه C است و می‌دانیم این دو نیمساز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس نقطه‌ای با خاصیت موردنظر وجود ندارد.



۳۵ - گزینه ۴ یک ماتریس 10×6 و A یک ماتریس $7 \times m$ است. پس ماتریس CA در صورتی قابل تعریف است که $m = 10$ باشد. B یک ماتریس $5 \times n$ است. پس ماتریس CAB تعریف می‌شود هرگاه $n = 7$ باشد، در نتیجه $mn = 70$

۳۶ - گزینه ۴ یک فرمول کلی برای به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A + A^2 + \dots + A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 60 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 3(1+2+\dots+20) \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 630 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

۳۷ - گزینه ۳ دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم؛ داریم:

$$-4 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x^2 - 5x + 6 - 2) - (3 - x - 3) + (2 - 6 + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 20x - 16 + x - 4 + 3x = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

۳۸ - گزینه ۴

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از } a \text{ در ستون اول}} a \begin{vmatrix} a & b^2 & c^2 \\ 1 & b & c \\ \frac{1}{a} & 0 & c \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{a \text{ را در سطر سوم}} \begin{vmatrix} a & b^2 & c^2 \\ 1 & b & c \\ a & 0 & ac \end{vmatrix}$$

۳۹ - گزینه ۴ با فرض $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ داریم:

$$a \cdot k = -1 \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 0, 1) = -1 \rightarrow a_3 = -1$$

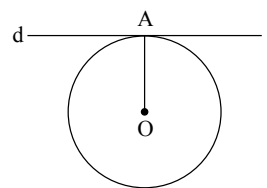
$$a \cdot (i - j) = -1 \rightarrow (a_1, a_2, a_3) \cdot (1, -1, 0) = -1 \rightarrow a_1 - a_2 = -1$$

$$a \cdot (k - 2i + 3j) = -1 \rightarrow (a_1, a_2, -1) \cdot (1, -2, 3) = -1 \rightarrow a_1 - 2a_2 - 3 = -1$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = -1 \\ a_1 - 2a_2 = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} a_1 - a_2 = -1 \\ a_2 = -3, a_1 = -4 \end{cases}$$

$$a = (-4, -3, -1) \rightarrow |a| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$

۴۰ - گزینه ۴



$$A \begin{vmatrix} x \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow x^2 + 1 + 2x + 4 - 20 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix} \\ x=-5 \rightarrow \begin{vmatrix} -5 \\ -1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \rightarrow O(-1, 2)$$

$$m_{OA} = \frac{2 - (-1)}{-1 - 3} = \frac{3}{-4} \rightarrow m_d = \frac{4}{3}$$

$$d \text{ معادله خط } : y + 1 = \frac{4}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{4}{3}x - 5 \rightarrow 4x - 3y = 15$$

۴۱ - گزینه ۱ طبق قضیه فرما، اگر p عددی اول و $(a, p) = 1$ ، آنگاه $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ اگر $a=5$ و $p=11$ فرض شود، داریم:

$$5^{10} \equiv 1 \Rightarrow 5^{10} \in [1]_{11}$$

۴۲ - گزینه ۳

طرفین معادله را در پیمانه ۱۵ هم‌نهیست قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{15x + 14y}_{=0} \equiv 1050 \xrightarrow{1050 \equiv 0} 14y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow y = 15k \Rightarrow 15x + 14 \times 15k = 1050$$

$$\Rightarrow x + 14k = 70 \Rightarrow x = -14k + 70$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow -14k + 70 \geq 1 \Rightarrow k \leq \frac{69}{14} \\ y \geq 1 \Rightarrow 15k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{15} \leq k \leq \frac{69}{14} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4$$

۴۳ - گزینه ۳ رأس ۱۵ را به صورت ایزوله کنار می‌گذاریم و با ۱۳ رأس دیگر گراف K_{13} درست می‌کنیم. در این صورت بیشترین تعداد یال را به دست آورده‌ایم که تعداد آن برابر است با:

$$q_{\max} = \binom{13}{2} = 78$$

۴۴ - گزینه ۲ برای رقم صدگان ۳ انتخاب وجود دارد. (۱ یا ۳ یا ۵)

بعد از انتخاب رقم صدگان، ۲ عدد فرد باقی می‌ماند که رقم دهگان یکی از این دو عدد می‌تواند باشد. سپس رقم یکان می‌تواند هر کدام از ۳ عدد باقی‌مانده باشد. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\underbrace{\text{حالت ۳}}_{\text{صدگان}} \underbrace{\text{حالت ۲}}_{\text{دهگان}} \underbrace{\text{حالت ۳}}_{\text{یکان}} \rightarrow 3 \times 2 \times 3 = 18$$

۴۵ - گزینه ۲ طبق فرض:

$$\begin{cases} a = bq + (q - 2) \\ a = (b - 2)(q + 7) = bq - 2q + 7b - 14 \end{cases}$$

$$bq + q - 2 = bq - 2q + 7b - 14 \Rightarrow 3q - 7b + 12 = 0 \Rightarrow 7b = 3q + 12 = 3(q + 4)$$

پس b مضرب ۳ است. از طرفی چون $q - 2 < b$ داریم:

$$q - 2 < b \Rightarrow q + 4 < b + 6 \Rightarrow 3(q + 4) < 3(b + 6) \Rightarrow 7b < 3(b + 6) \Rightarrow 4b < 18 \Rightarrow b < 4.5$$

از بین گزینه‌ها فقط عدد ۳ در این ۲ شرط صدق می‌کند.

۴۶ - گزینه ۱

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow |S_1| = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

واضح است که اگر y_1, y_2, y_3 به عوامل اول تجزیه شوند، فقط عوامل ۷ و ۲ ظاهر می‌شوند پس y_1, y_2, y_3 به صورت زیر هستند:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 7^{z_1} \times 2^{t_1} \\ y_2 &= 7^{z_2} \times 2^{t_2} \\ y_3 &= 7^{z_3} \times 2^{t_3} \end{aligned} \right\} \rightarrow y_1 y_2 y_3 = 7^{z_1+z_2+z_3} \times 2^{t_1+t_2+t_3} = 7^3 \times 2^4$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 3$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 4$$

برای به دست آمدن جوابهای طبیعی t_i ها و t_i ها می توانند برابر صفر هم باشند. پس باید تعداد جوابهای صحیح و نامنفی دو معادله فوق را به دست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} |S_2| &= \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 \\ |S_3| &= \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15 \end{aligned} \right\} \rightarrow 10 \times 15 = 150$$

دو معادله دستگاه نیز از یکدیگر مستقل اند پس تعداد جوابهای نهایی برابر است با: $6 \times 150 = 900$

۴۷ - گزینه ۴

$$(n^2 - 4n, 5n + 6) = d$$

$$\left. \begin{aligned} d|n^2 - 4n &\xrightarrow{\times 5} d|5n^2 - 20n \\ d|5n + 6 &\xrightarrow{\times n} d|5n^2 + 6n \end{aligned} \right\} \rightarrow d|26n$$

$$\left. \begin{aligned} d|26n &\xrightarrow{\times 5} d|26 \times 5n \\ d|5n + 6 &\xrightarrow{\times 26} d|5 \times 26n + 156 \end{aligned} \right\} \rightarrow d|156 = 2^2 \times 3 \times 13$$

در بین مقسوم علیه های طبیعی d ، ۱۳ بزرگترین مقدار اول می باشد.

۴۸ - گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} 11|5a + 3b \\ 11|22a - 11b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 11|27a - 8b$$

۴۹ - گزینه ۲ در یک گراف K - منتظم مرتبه p داریم: $Kp = 2q$

$$\begin{aligned} 4p &= 2q \xrightarrow{q=7p-25} 4p = 2(7p - 25) \Rightarrow 4p = 14p - 50 \\ \Rightarrow 10p &= 50 \Rightarrow p = 5 \quad q = 10 \Rightarrow p + q = 15 \end{aligned}$$

۵۰ - گزینه ۱ برای رفتن از A به B دو انتخاب داریم و برای رفتن از B به C سه انتخاب داریم پس تا اینجا، برای رفتن از A به C ، $2 \times 3 = 6$ انتخاب داریم. برای رفتن از A به C به صورت مستقیم هر یک مسیر داریم پس برای رفتن از A به C به تعداد $6 + 1 = 7$ حالت داریم.

به طور مشابه برای برگشت از C به A نیز ۷ انتخاب داریم. اما یکی از این ۷ انتخاب را نباید انتخاب کنیم چون که قبلاً توسط مسیر رفت طی شده است و نمی توان آن را طی کرد. پس برای برگشت از C به A ، ۶ انتخاب داریم. در نهایت $7 \times 6 = 42$ انتخاب داریم.

۵۱ - گزینه ۲ اولین مضرب ۳ از این مجموعه عدد ۷۲ است.

$$110 - 72 = 38$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 12 \overline{) 38} \\ \underline{-36} \\ 02 \end{array} \xrightarrow{\text{با احتساب خود } 72} 12 + 1 = 13$$

اولین مضرب ۷ از این مجموعه عدد ۷۰ است.

$$110 - 70 = 40$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 5 \overline{) 40} \\ \underline{-35} \\ 05 \end{array} \xrightarrow{\text{با احتساب خود } 70} 5 + 1 = 6$$

جمع دو عدد به دست آمده $13 + 6 = 19$ می شود.

حال باید اعداد تکراری را به دست آوریم یعنی اعدادی که مضرب ۲۱ هستند. در این بازه اعداد ۸۴ و ۱۰۵ مضرب ۲۱ هستند و دو بار حساب شده اند پس $19 - 2 = 17$. در بازه ۷۰ تا ۱۱۰

به اندازه $41 = 1 + 7 + 11$ عدد داریم که $17 = 41 - 17$ تا آن‌ها نه مضرب ۳ و نه مضرب ۷ هستند.

۵۲ - گزینه ۱

$$7x + 5y = 130 \Rightarrow 5y = 130 - 7x \xrightarrow{\div 5} y = 26 - \frac{7x}{5}$$

برای اینکه y طبیعی باشد و با توجه به اینکه x هم طبیعی است، لازم است $\frac{7x}{5}$ طبیعی شود. اما ۷ با ۵ ساده نمی‌شود، پس تنها راه برای اینکه کسر به عدد طبیعی تبدیل شود این است که x مضرب ۵

باشد. پس $x = 5k$ و $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$y = 26 - \frac{7(5k)}{5} = 26 - 7k$$

در رابطه بالا k می‌تواند ۱ و ۲ و ۳ باشد که y منفی نشود. پس سه نقطه با مختصات طبیعی خواهیم داشت.

۵۳ - گزینه ۳: کلماتی که دوتا e کنارهم هستند.

B : کلماتی که دوتا t کنارهم هستند.

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = \frac{8!}{2! \times 2!} - \left(\frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!} - 6! \right) = 10080 - (2520 + 2520 - 720) = 5760$$

۵۴ - گزینه ۱ به ازای $n \geq 6$ عدد $n!$ بر ۴۵ بخش پذیر است، بنابراین داریم:

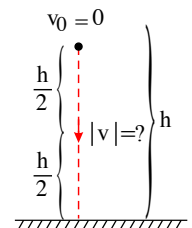
$$51x \equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 0 \Rightarrow 51x \equiv 153 \xrightarrow[\substack{\div 51 \\ (51, 45)=3}]{\div 51} x \equiv 3 \Rightarrow x = 15k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۵۵ - گزینه ۲ هر جمله این بسط به صورت $a^x b^y c^z$ است که $x + y + z = 10$ است و $x, y, z \geq 0$ پس کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x + y + z = 10$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\binom{12}{2} = 66$$

۵۶ - گزینه ۱ با انتخاب جهت مثبت محور y ‌ها رو به پایین و محل پرتاب به عنوان مبدا:

$$v^2 - v_0^2 = 2gy \xrightarrow{y=\frac{h}{2}} v^2 - 0 = 2g\left(\frac{h}{2}\right) \Rightarrow v^2 = gh \Rightarrow v = \sqrt{gh}$$



۵۷ - گزینه ۱ می‌دانیم که با استفاده از قانون دوم نیوتون، می‌توان شتاب حرکت را محاسبه کرد. در اینجا که نیرویی موثر در هر دو حالت یکسان است داریم:

$$\begin{cases} a = \frac{F}{m} \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \\ 0.5 = \frac{1}{2} \frac{F}{(m + 0.5)} t^2 \end{cases}$$

پس از تقسیم ۲ رابطه داریم

$$\frac{1}{2} = \frac{m + 0.5}{m} \Rightarrow m = 0.5 kg$$

۵۸ - گزینه ۴ برای پیدا کردن بیشینه سرعت نوسانگر، باید بسامد زاویه‌ای را محاسبه کنیم:

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_{\max} = 0.04 \times \sqrt{\frac{k}{m}} = 0.04 \times \sqrt{\frac{32}{20 \times 10^{-3}}} = 1.6 \frac{m}{s}$$

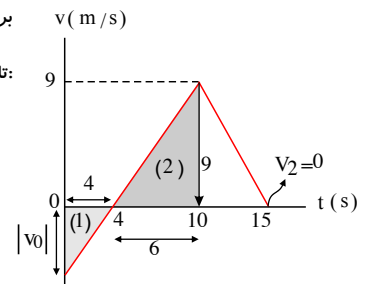
۵۹ - گزینه ۳ اگر بزرگی نیروی کشش نخ را T فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$m = 50g = 0.05kg$$

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) = 0.05(10 + 2)N = 0.6N$$

گزینه ۱ - ۶۰

برای محاسبه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت-زمان، از رابطه‌ی $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ استفاده می‌کنیم. به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظه‌ی $t = 0$ را به دست آوریم:



$$\frac{4}{10 - 4} = \frac{|v_0|}{9} \Rightarrow |v_0| = 6 \frac{m}{s} \quad (2) \text{ تشابه مثلث‌های (1) و (2)}$$

همان طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_0 = -6 \frac{m}{s} \Rightarrow a_{av} = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = 0.4 \frac{m}{s^2} \\ t_2 = 15s \Rightarrow v_2 = 0 \end{cases}$$

۶۱ - گزینه ۱ متحرکی که با شتاب کم‌تر شروع به حرکت می‌کند، دیرتر به نقطه‌ی B می‌رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیش‌تر در راه است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow{a=\frac{2}{3} \frac{m}{s^2}, a'=\frac{1}{3} \frac{m}{s^2}} \frac{1}{2} \times 2 \times (t+3)^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times t^2 \Rightarrow t+3 = 2t \Rightarrow t = 3s$$

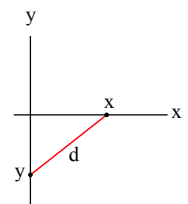
بنابراین متحرکی که با شتاب کم‌تر شروع به حرکت کرده، $6s$ در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (3+3)^2 = 36m$$

۶۲ - گزینه ۳ با توجه به شکل زیر فاصله‌ی میان دو متحرک در هر لحظه از رابطه $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-10t + 40)^2 + (20t - 30)^2}$$

$$= \sqrt{500t^2 - 2000t + 2500} = 10\sqrt{5}\sqrt{t^2 - 4t + 5}$$



کمترین فاصله دو متحرک در لحظه‌ای ایجاد می‌شود که مقدار $A = t^2 - 4t + 5$ کمینه شود.

$$A = t^2 - 4t + 5 = (t^2 - 4t + 4) + 1 = (t-2)^2 + 1$$

$$(t-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (t-2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow A \geq 1$$

باتوجه به محاسبه بالا، در لحظه $t = 2s$ مقدار A کمینه می شود و کمینه آن $A_{\min} = 1$ است.

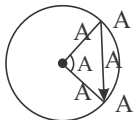
$$\Rightarrow d_{\min} = 10\sqrt{5}\sqrt{A_{\min}} = 10\sqrt{5}m$$

در لحظه $t = 2s$ فاصله متحرک ها کمترین و برابر $10\sqrt{5}$ متر می شود.

۶۳ - گزینه ۳ سرعت جسم در مدت $1.5s = 0.5s + 1s$ از $4\frac{m}{s}$ به $2\frac{m}{s}$ در سوی مخالف رسیده است. اگر جهت مثبت را به سوی بالای سطح شیب دار قرارداد کنیم:

$$\begin{cases} v_o = +4\frac{m}{s} \\ v = -2\frac{m}{s} \\ \Delta t = 1.5s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v - v_o}{\Delta t} = \frac{(-2) - (+4)}{1.5} = -4\frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = 4\frac{m}{s^2}$$

۶۴ - گزینه ۳ جابه جایی ذره برابر شعاع دایره است. پس طبق شکل روبه رو نقطه آغاز (A) و نقطه پایان (B) حرکت در دو سر کمانی به اندازه 60° درجه قرار دارند. طول این کمان را L فرض می کنیم.



$$d = r \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 90\pi cm \Rightarrow l = \frac{1}{6} \times \text{محیط} = 15\pi cm$$

ذره می تواند کمان AB را در سوی ساعتگرد پیموده باشد و مسافت پیموده شده توسط آن $15\pi cm$ باشد. همچنین ذره ممکن است در سوی پادساعتگرد از A و B رفته باشد و مسافت پیموده شده توسط آن $75\pi cm = 90\pi - 15\pi$ باشد. از طرفی ذره ممکن است پس از پیمودن یک یا چند دور کامل از نقطه A به نقطه B برود. بنابراین مسافت پیموده شده توسط ذره برحسب سانتی متر هریک از مقدارهای زیر می تواند باشد:

$$\begin{cases} 15\pi, 105\pi, 195\pi, 285\pi, \dots \\ 75\pi, 165\pi, 255\pi, 345\pi, \dots \end{cases}$$

بنابراین مسافت پیموده شده نمی تواند 135π سانتی متر باشد.

۶۵ - گزینه ۳ بیشترین فاصله میان گلوله ها در لحظه ای ایجاد می شود که گلوله اول به زمین می رسد.

$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt^2 = h \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 = h - 45 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}g(t-1)^2 = \frac{1}{2}gt^2 - 45$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - gt + \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}gt^2 - 45 \Rightarrow t = 5s$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 = 125m$$

۶۶ - گزینه ۳ در ابتدا نیروی خالص سپس بزرگی نیروی خالص و در نهایت بزرگی شتاب جسم را می یابیم.

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \\ \vec{F}_2 &= -6\vec{i} + 8\vec{j} \\ \Rightarrow \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow F_{net} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5N \end{aligned}$$

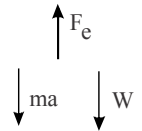
$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{5}{0.5} = 10 \frac{m}{s^2}$$

۶۷ - گزینه ۱ برای یک جرم و فنر آویخته در آسانسور با شتاب رو به پایین داریم:

$$\sum F = ma \rightarrow W - F_e = ma \xrightarrow{W=mg} F_e = m(g - a)$$

$$\xrightarrow{F_e=k\Delta x} k = \frac{m(g - a)}{\Delta x} = \frac{6}{0.015} m$$

$$\text{یا } k = 400 m$$



چون انرژی مکانیکی از رابطه $E = \frac{1}{2}kA^2$ محاسبه می‌شود و $E = U + K$ که در آن $K = \frac{1}{2}mv^2$ است، خواهیم داشت:

$$U + K = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{U=K} 4K = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{K=\frac{1}{2}mv^2} 2mv^2 = \frac{400 m}{2} A^2$$

$$v^2 = 100 A^2 \rightarrow v = 10 A \xrightarrow{A=0.01(m)} v = 0.1 m/s$$

۶۸ - گزینه ۲ در اینجا انرژی جنبشی جسم در لحظه برخورد به فنر آزاد، برابر با انرژی مکانیکی می‌شود. بنابراین فنر به اندازه A فشرده می‌شود که از رابطه $\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}kA^2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A^2 = \frac{mv_o^2}{k} \xrightarrow{m=1kg, v_o=4m/s, k=100} A = 0.4 m$$

از طرفی $v_o = A\omega$ پس خواهیم داشت $\omega = \frac{v_o}{A} = \frac{4}{0.4} = 10 rad/s$
معادله حرکت به صورت زیر است:

$$x = A \cos \omega t$$

با قرار دادن $\omega = 10$ و $A = 0.4 m$ در آن رو به ازای $t = \frac{\pi}{30} s$ خواهیم داشت:

$$x = 0.4 \cos(10 \times \frac{\pi}{30}) = 0.2 m$$

۶۹ - گزینه ۱

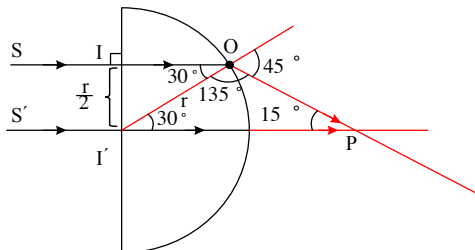
$$\text{تراز شدت صوت } \beta = 10 \log \frac{I}{I_o} \xrightarrow{\beta=+20dB} \log \frac{I}{10^{-12}} = +2$$

$$\rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^2 \rightarrow I = 10^{-10}$$

$$\text{شدت صوت } I = \frac{P}{A} \rightarrow 10^{-10} = \frac{4 \times 10^{-12}}{4\pi r^2} \rightarrow r^2 = \frac{1}{100} \rightarrow r = \frac{1}{10} m$$

۷۰ - گزینه ۱

هر دو پرتو بدون انحراف وارد محیط شفاف می‌شوند چون عمود بر مرز می‌تابند. پرتو $S'I'$ چون در امتداد شعاع وارد می‌شوند پس بر سطح قوس نیز عمود است بنابراین بدون انحراف از محیط شفاف خارج می‌شود.



اما پرتو SI به دلیل اینکه ضلع مقابل زاویه تابش آن به قوس نصف وتر مثلث IOI' است پس با زاویه 30° به قوس می‌تابد. بنابراین طبق قانون اسنل در شکست نور خواهیم داشت:

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_r \rightarrow \sqrt{2} \sin 30^\circ = \sin \theta_r \rightarrow \sin \theta_r = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta_r = 45^\circ$$

بنابراین طبق شکل با زاویه شکست 45° وارد هوا می‌شود. زاویه‌ای که دو پرتو با یکدیگر می‌سازند طبق شکل برابر زاویه P در مثلث $I'OP$ است بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{P} + 135^\circ + 30^\circ = 180^\circ \rightarrow \hat{P} = 15^\circ$$

۷۱ - گزینه ۲ روش اول:

وقتی $\frac{15}{16}$ ماده اولیه واپاشی شده، یعنی $\frac{1}{16}$ هسته های اولیه باقی می‌ماند.

$$N_0 \xrightarrow{T} \frac{N_0}{2} \xrightarrow{T} \frac{N_0}{4} \xrightarrow{T} \frac{N_0}{8} \xrightarrow{T} \frac{N_0}{16}$$

$$4T = 2 \text{ شبانه روز} = 48 \text{ ساعت} \Rightarrow T = \frac{48}{4} = 12 \text{ ساعت}$$

روش دوم:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{48}{T}} \Rightarrow 4 = \frac{48}{T} \Rightarrow T = 12 \text{ ساعت}$$

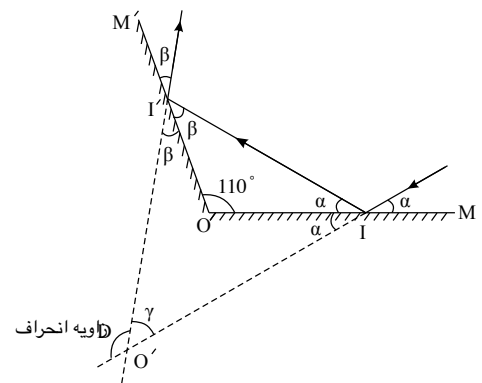
۷۲ - گزینه ۴ طبق قانون بازتاب عمومی، زاویه انحراف، زاویه پرتو تابش به آینه M نسبت به پرتو بازتاب از آینه M' است. بنابراین مطابق شکل داریم:

$$II'O \text{ در مثلث } : \alpha + \beta + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 70^\circ$$

$$II'O' \text{ در مثلث } : 2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2 \times 70^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 40^\circ$$

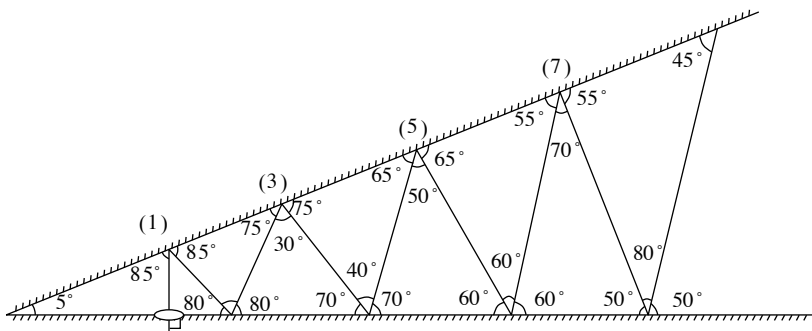
$$\text{زاویه انحراف } : D = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$



روش دوم) هرگاه زاویه بین دو آینه متقاطع مطابق شکل، بزرگتر از 90° باشد، آنگاه زاویه انحراف از رابطه $D = 360^\circ - 2\theta$ به دست می‌آید.

$$\text{زاویه انحراف } : D = 360^\circ - 2\theta = 360^\circ - 2 \times 110^\circ = 140^\circ$$

۷۳ - گزینه ۳



برای خروج پرتو از آینه‌ها باید زاویه بازتاب با آینه 5° شود. در تابش اول زاویه پرتو بازتابش با آینه ۸۵ و در بازتابش سوم ۷۵، در بازتابش پنجم ۶۵، در بازتابش هفتم ۵۵، در بازتابش نهم ۴۵، در بازتابش یازدهم ۳۵، در بازتابش سیزدهم ۲۵، در بازتابش

پانزدهم ۱۵، در بازتابش هفدهم ۵ درجه می‌شود. و سپس این پرتو از میان دو آینه خارج می‌شود و تعداد کل بازتاب‌ها ۱۷ است.

روش دوم: اگر زاویه بین پرتو تابش و سطح آینه در اولین برخورد را α و زاویه بین دو آینه را θ بنامیم، در آخرین (n امین برخورد) که پرتوهای موازی یکی از آینه‌ها می‌شود، داریم:

$$\theta = \alpha - (n-1)\theta \xrightarrow[\theta=5]{\alpha=15} 5 = 15 - (n-1)5 \Rightarrow n = 17$$

۷۴ - گزینه ۲

$$\beta_1 = 50 \text{ db}$$

اگر فاصله ثابت می‌ماند، باید شدت صوت ۸۰ برابر شود ولی چون فاصله ۴ برابر شده است پس شدت صوت $\frac{80}{16}$ یعنی ۵ برابر شده است.

$$I_p = 5I_1$$

$$\beta_p - \beta_1 = 10 \log \left(\frac{I_p}{I_1} \right) = 10 \log 5 = 10 (\log 10 - \log 2) = 10 (1 - 0.3) = 7 \text{ db}$$

$$\Rightarrow \beta_p - 50 = 7 \Rightarrow \beta_p = 57 \text{ db}$$

۷۵ - گزینه ۳ بدیهی است می‌بایستی از دو عدد ۸ و ۱۲ ثانیه که لحظه به هم رسیدن دو متحرک A و B به یکدیگر است نهایت استفاده را برد. این دو عدد ریشه‌های معادله‌ای هستند که از مساوی قرار دادن معادله‌های $(x-t)$ دو متحرک A و B با هم به دست می‌آید:

$$x_A = x_B \rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{0A}t + x_{0A} = v_B t + x_{0B} \rightarrow \frac{1}{2}a_A t^2 - v_B t + x_{0A} = 0$$

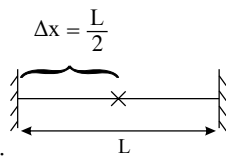
$$\rightarrow t^2 - \left(\frac{2v_B}{a_A} \right) t + \left(\frac{2x_{0A}}{a_A} \right) = 0$$

$$t_1 + t_p = 20 \rightarrow \frac{2v_B}{a_A} = 20 \rightarrow \frac{v_B}{a_A} = 10 \text{ s} \quad (*)$$

و اکنون شرط مسأله را لحاظ می‌نمائیم:

$$v_A = v_B \rightarrow a_A t' + v_{0A} = v_B \rightarrow t' = \frac{v_B}{a_A} \xrightarrow{(*)} t' = 10 \text{ s}$$

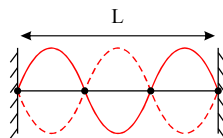
۷۶ - گزینه ۱



قدم اول:

$$\Delta x = \frac{L}{2} = v \Delta t = 0.4v \rightarrow L = 0.8v$$

قدم دوم $\Rightarrow$ (پس از ارتعاش و تشکیل موج ایستاده) $\Rightarrow L = 3 \frac{\lambda}{2} \xrightarrow{(*)}$



$$0.8v = \frac{3}{2} \left(\frac{v}{f} \right) \rightarrow 2f = \frac{3}{0.8} = \frac{30}{8} = 3.75 \rightarrow f = \frac{3.75}{2} = 1.875 \text{ Hz}$$

۷۷ - گزینه ۲ قدم اول: می‌دانیم

$$E = U_{\max} = K_{\max}$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow K = K_{\max} = E, U = 0 \\ x = A \rightarrow \begin{cases} K = 0 \\ U = U_{\max} = E \end{cases} \end{cases}$$

قدم دوم:

$$x = -\frac{1}{2}cm \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} \begin{cases} K_{(r)} = (K_{(1)})_{\max} = E_{(1)} \\ U_{(r)} = \frac{3}{2}E_{(1)} \end{cases} \Rightarrow E_{(r)} = U_{(r)} + K_{(r)} = E_{(1)} + \frac{3}{2}E_{(1)}$$

$$\rightarrow E_{(r)} = \frac{5}{2}E_{(1)} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k_r A_r^2 = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}k_1 A_1^2) \rightarrow A_r^2 = 3A_1^2 \rightarrow A_r = \sqrt{3}A_1 \rightarrow A_r = \sqrt{3}cm \\ k_r = k_1 \end{cases}$$

فترها مشابه هستند

۷۸ - گزینه ۴

اگر محل رها شدن گلوله را مبدأ مکان و کل زمان حرکت گلوله را t ثانیه فرض کنیم، با استفاده از معادله مکان - زمان حرکت گلوله، داریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} -h = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 \\ -\frac{4}{9}h = -\frac{1}{2}g(t-1)^2 + 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{(t-1)^2}{t^2} \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین تندی برخورد گلوله به سطح زمین برابر است با:

$$v = -gt = -10 \times 3 \Rightarrow |v| = 30 \frac{m}{s}$$

۷۹ - گزینه ۲ جابجایی در t ثانیه اول را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 25 = \frac{1}{2}a(5)^2 + v_0 \times 5$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{25}{2}a + 5v_0 \quad 10 = 5a + 10v_0 \quad (1)$$

و جابجایی در t ثانیه n ام را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2(2n-1) + v_0 t \xrightarrow[t=5]{t=4s} 64 = \frac{1}{2}a(4)^2(2 \times 5 - 1) + 4v_0 \rightarrow 64 = 40a + 4v_0 \rightarrow 16 = 10a + v_0 \quad (2)$$

$$\Delta x = \frac{v_{16} + v_{20}}{2} \times \Delta t \Rightarrow 64 = \frac{v_{16} + v_{20}}{2} \times 4 *$$

$$(1), (2) \rightarrow \begin{cases} 10 = 5a + 10v_0 \\ 16 = 10a + v_0 \end{cases}$$

$$a = \frac{22}{31} \frac{m}{s^2}$$

۸۰ - گزینه ۲ می‌دانیم رابطه دوره به صورت $T = \frac{t}{n}$ است، پس دوره با تعداد نوسان رابطه عکس دارد. بنابراین داریم:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{n_B}{n_A} \xrightarrow{n_A=6} \frac{T_A}{T_B} = \frac{5}{6}$$

باید توجه داشت که دوره آونگ از رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به دست می‌آید و از آنجایی که شتاب گرانش تغییر نمی‌کند می‌توان نوشت:

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \rightarrow \frac{5}{6} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} \rightarrow \frac{25}{36} = \frac{L_A}{L_B} \rightarrow L_B = \frac{36}{25}L_A$$

حال با جایگذاری در رابطه $\frac{L_A + L_B}{L_A}$ مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{L_A + L_B}{L_A} = \frac{L_A + \frac{36}{25}L_A}{L_A} = \frac{\frac{61}{25}L_A}{L_A} = \frac{61}{25}$$

۸۱ - گزینه ۲ هرچقدر فاصله از منبع صوت افزایش یابد تراز شدت صوت کاهش می‌یابد. از رابطه تراز شدت صوت برحسب فاصله برای حل سؤال استفاده می‌کنیم.

$$\beta_r - \beta_1 = 10 \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \xrightarrow{\beta_r - \beta_1 = -32dB} -32 = 10 \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow -3.2 = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow -(2 + 1.2) = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow -(\log 10^2 + 4 \log 2) = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2$$

$$\Rightarrow -(\log 100 + \log 16) = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow -\log 1600 = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow \log \frac{1}{1600} = \log\left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 = \frac{1}{1600} \Rightarrow \frac{d_1}{d_r} = \frac{1}{40} \Rightarrow d_r = 40d_1$$

وقتی شخص $19.5m$ دور می‌گردد می‌توان نوشت $d_r = 19.5 + d_1$ بنابراین از دستگاه زیر برای به دست آوردن d_1 استفاده می‌کنیم.

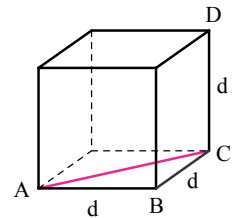
$$\begin{cases} d_r = 4d_1 \\ d_r = 19.5 + d_1 \end{cases} \Rightarrow 4d_1 = 19.5 + d_1 \Rightarrow d_1 = 6.5m$$

$$t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{d}{v}$$

$$AC = \sqrt{d^2 + d^2} = d\sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2d^2 + d^2} = d\sqrt{3}$$

$$v_{av} = \frac{AD}{t_{کل}} = \frac{d\sqrt{3}}{3t} = \frac{d\sqrt{3}}{3 \frac{d}{v}} = \frac{\sqrt{3}}{3} v$$



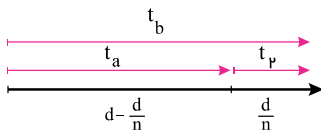
جابجایی کل حرکت:

۸۳ - گزینه ۲ زمان طی کردن $\frac{d}{n}$ اول مسیر برابر است با:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\frac{d}{n} = \frac{1}{2}at_1^2 + 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{na}}$$

برای به دست آوردن t_2 ثانیه $\frac{d}{n}$ آخر مسیر باید دو زمان را از هم کم کرد.



$$d = \frac{1}{2}at_b^2 \Rightarrow t_b = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

$$d - \frac{d}{n} = \frac{1}{2}at_a^2 \Rightarrow t_a = \sqrt{\frac{2d}{a}} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$t_r = t_b - t_a = \sqrt{\frac{2d}{a}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

$$\frac{t_r}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{2d}{a}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{\frac{2d}{na}}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

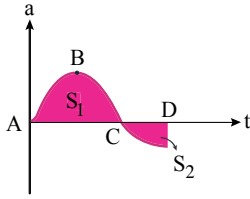
۸۴ - گزینه ۱ بیشترین سرعت زمانی است که شتاب مثبت باشد تا همواره به سرعت اضافه شود. بنابراین تا C، همواره $a > 0$ بوده و v افزایش می یابد.

$$v_{\max} = V_C$$

تا زمانی که علامت سرعت (در اینجا مثبت است) عوض نشده متحرک از مبدأ دور می شود.

$$\Delta v_{0-D} = S_1 - S_r > 0$$

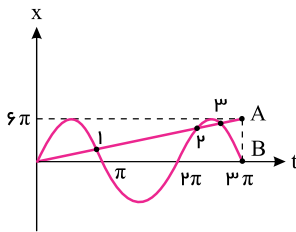
سرعت تا D همواره مثبت است. بنابراین: در D متحرک C در بیشترین فاصله از مبدأ قرار دارد.



۸۵ - گزینه ۳ با توجه به معادله حرکت B، در هر 2π ثانیه متحرک یک $\sin$ کامل را طی می کند. در هر دوره کامل متحرک مسافت $4 \times 6\pi$ را طی می کند. به ازای هر $\frac{\pi}{2}$ s متحرک مسافت 6π را طی می کند. برای طی 36π زمان لازم برابر است با:

$$\frac{36\pi}{6\pi} = \frac{t}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = 3\pi s$$

حال معادله مکان - زمان A و B را رسم می کنیم:



محل تقاطع ۳ بار است.

۸۶ - گزینه ۲ در ابتدا شتاب حرکت را هنگام بالا رفتن به دست می آوریم سپس با برعکس بررسی کردن حرکت (یعنی با همان شتاب از نقطه اوج تا پرتاب) زمان بالارفتن را می یابیم:

$$F_{net} = ma_1 \Rightarrow mg + f_{\text{مقاومت هوا}} = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{mg + f_{\text{مقاومت هوا}}}{m} \Rightarrow a_1 = \frac{3 \times 10 + 6}{3} = 12 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{\Delta y}{6}}$$

حالا باید شتاب حرکت رو به پایین را بیابیم و مجدداً برای این قسمت از حرکت هم زمان را به دست می آوریم:

$$F_{net} = ma_2 \Rightarrow mg - f_{\text{مقاومت هوا}} = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{mg - f_{\text{مقاومت هوا}}}{m} \Rightarrow a_2 = \frac{3 \times 10 - 6}{3} = 8 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{\Delta y}{4}}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{\Delta y}{6}}}{\sqrt{\frac{\Delta y}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۸۷ - گزینه ۲ نیروها و معادلات را در دو حالت بالا رفتن و پایین آمدن به دست می آوریم.
بالا رفتن:

$$\sum F = ma \Rightarrow -mg - f = ma_1 \Rightarrow a_1 = -g - \frac{f}{m} = -(g + \frac{f}{m})$$

$$\sum F = ma \Rightarrow -mg + f = ma_2 \Rightarrow a_2 = -(g - \frac{f}{m})$$

$$v_o^2 - v_o^2 = 2a_1 \Delta y \Rightarrow a_1 = \frac{-v_o^2}{2\Delta y}$$

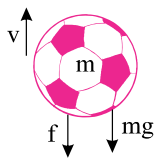
$$(\frac{v_o}{2})^2 - 0 = 2a_2 \Delta y \Rightarrow a_2 = \frac{+v_o^2}{8\Delta y} \Rightarrow a_1 = -4a_2$$

$$-g - \frac{f}{m} = -4(g - \frac{f}{m})$$

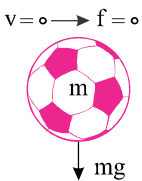
$$-g - \frac{f}{m} = -4g + \frac{4f}{m} \Rightarrow 3g = \frac{5f}{m} \Rightarrow f = \frac{3}{5}mg$$

حال a_1 و a_2 را جاگذاری می‌کنیم:

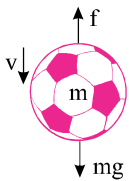
۸۸ - گزینه ۳ نیروی مقاومت هوا خلاف جهت حرکت است.
بالا رفتن:



نقطهٔ اوج:



پایین رفتن:



با توجه به شکل در هنگام بالا رفتن $F_{net} = mg + f$ است.
در لحظهٔ پرتاب:

$$v_{max} \Rightarrow f_{max} \Rightarrow F_{net(max)}$$

F_{net} شود شتاب نیز بیشینه می‌شود.

۸۹ - گزینه ۴ با توجه به معادلهٔ حرکت، دامنه و دورهٔ نوسان را می‌یابیم:

$$x = 0.1 \cos(2\pi t) \Rightarrow \omega = 2\pi \Rightarrow T = 0.1s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 10Hz$$

تعداد نوسان در یک ثانیه ۱۰ بار است، یعنی در هر ثانیه ۲۰ بار از مرکز نوسان که انرژی جنبشی بیشینه دارد، می‌گذرد:

$$A = 0.1m = 10cm$$

$$فاصلهٔ دو نقطهٔ بازگشت = 2A = 20cm$$

$$حد اقل در مدت $\frac{T}{4}$ به K_{max} تبدیل می‌شود. یعنی در $\frac{1}{40}$ ثانیه در $t = \frac{1}{20}$ و $t = \frac{T}{4}$ سرعت دوباره صفر می‌شود و شتاب متوسط هم صفر می‌شود.$$

۹۰ - گزینه ۳ نادرستی گزینه ۱؛ جابه جایی متحرک A به دلیل بیشتر بودن سطح زیر نمودار از جابه جایی B و C بیشتر است؛ پس $v_{avA} > v_{avB} > v_{avC}$

نادرستی گزینه ۲؛ تغییرات سرعت هر ۳ متحرک برابر است، پس طبق $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ خواهیم داشت:

$$a_{avA} = a_{avB} = a_{avC}$$

درستی گزینه ۳؛ سرعت متوسط B به دلیل ثابت بودن شتاب از رابطه $\frac{v'}{2} = \frac{0 + v'}{2}$ به دست می آید و چون جابه جایی A بیشتر از B و جابه جایی C کم تر از B است، گزینه ۳ درست است.

نادرستی گزینه ۴؛ شیب نمودار A از مقدار بیشینه شروع به کاهش می کند. شیب نمودار B ثابت است و $a = 0$ ولی شیب نمودار C افزایش می یابد، یعنی:

$$\Delta a_C > 0$$

۹۱ - گزینه ۴ ابتدا باید ببینیم که جسم در کدام بخش از مسیر می ایستد. برای این کار فرض می کنیم که کل مسیر روغن کاری شده است و مسافت لازم برای ایستادن جسم را محاسبه می کنیم. (دقت کنید که در اینجا بر روی سطح افقی، فقط نیروی اصطکاک کار می کند)

$$W = \Delta K \Rightarrow f_k \times d = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \Rightarrow \mu_k \times m \times g \times d = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 0.3 \times m \times 10 \times d = \frac{1}{2} \times m \times 30^2 \Rightarrow d = 150m$$

اگر تمام سطوح روغن کاری باشد در ۱۵۰ متری می ایستد از آنجا که فقط ۳۰ متر از مسیر روغن ریخته شده، بنابراین جسم در سطح خشک از حرکت بازمی ایستد. پس ابتدا باید سرعت را در اول مسیر خشک محاسبه کنیم:

$$-f_k \times d = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow -\mu_k \times m \times g \times d = \frac{1}{2}m(v_p^2 - v_1^2) \Rightarrow 0.3 \times m \times 10 \times 30 = \frac{1}{2} \times m(30^2 - v_p^2) \Rightarrow 90 = \frac{1}{2}(900 - v_p^2) \Rightarrow v_p^2 = 720$$

$$\Rightarrow f_{k_p} \times d = \frac{1}{2}mv_p^2 \Rightarrow \mu_k \times m \times g \times d = \frac{1}{2} \times m \times v_p^2 \xrightarrow{\mu_k = 0.6} 0.6 \times m \times 10 \times d = \frac{1}{2} \times m \times 720 \Rightarrow d = 60m$$

(دقت کنید که سرعت در ابتدای سطح خشک برابر سرعت در انتهای مسیر روغن کاری شده است که آن را V_p نامیده ایم.)

در نتیجه کل مسافت طی شده ۹۰m است. یعنی ۳۰m در مسیر روغن کاری شده و ۶۰m در مسیر خشک.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{گزینه ۲ با توجه به تعریف سرعت متوسط داریم:}$$

$$\text{در } 4 \text{ ثانیه اول حرکت } v_{av} = \frac{x_f - x_o}{t_f - t_o} \Rightarrow \frac{x_f - x_o}{4} = \frac{3m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{x_{10} - x_f}{t_{10} - t_f} \Rightarrow \frac{x_{10} - x_f}{10 - 4} = -\frac{6m}{s} \Rightarrow \begin{cases} x_f - x_o = 12m \\ x_{10} - x_f = -36m \end{cases}$$

با توجه به رابطه به دست آمده داریم:

$$\frac{\begin{cases} x_f - x_o = 12m \\ x_{10} - x_f = -36m \end{cases}}{x_{10} - x_o = -24m} \Rightarrow v_{av(0-10)} = \frac{x_{10} - x_o}{t_{10} - t_o} \xrightarrow{x_{10} - x_o = -24m} v_{av} = -2 \frac{m}{s}$$

۹۳ - گزینه ۱ از نمودار انرژی جنبشی - سرعت کمیت p را به دست می آوریم:

$$K_{max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow 1.6 = \frac{1}{2}m \times (\lambda)^2 \Rightarrow m = \frac{2 \times 1.6}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} kg$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}m \times \frac{1}{\lambda^2} \times (\lambda)^2 \Rightarrow p = 0.9J$$

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow A\omega = \lambda \quad (I)$$

از نمودار مکان - زمان ω را به دست آورده، سپس با استفاده از رابطه (I)، دامنه نوسان را محاسبه می کنیم:

$$\frac{\Delta T}{4} = \frac{\pi}{16} \Rightarrow T = \frac{\pi}{20} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{20}} = 40 rad/s$$

$$(I) : A\omega = \lambda \Rightarrow A \times 40 = \lambda \Rightarrow A = \frac{\lambda}{40} = 0.2m$$

با معلوم شدن ω و A معادله مکان - زمان را مشخص می کنیم و سپس با استفاده از آن کمیت مجهول q را محاسبه می کنیم:

$$x = A \cos \omega t = 0.2 \cos 40t$$

$$q \text{ در لحظه } 1 = \cos 40^\circ q \Rightarrow \cos 40^\circ q = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 40^\circ q = \frac{\pi}{3} \Rightarrow q = \frac{\pi}{120}$$

۹۴ - گزینه ۲ در ابتدا با یک مشتق گیری از معادله مکان-زمان، معادله سرعت را پیدا می کنیم. سپس با قراردادن دو لحظه مورد نظر در رابطه $v - t$ دو سرعت و در نهایت شتاب متوسط را می یابیم

$$x = \frac{t^3}{2} + 2t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + 2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t$$

$$a_{av} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{(\frac{3}{2} \times 4^2 + 2) - (\frac{3}{2} \times 2^2 + 2)}{4 - 2} = \frac{26 - 8}{2} = 9 \frac{m}{s^2}$$

۹۵ - گزینه ۲ با توجه به این که در لحظه صفر، سرعت و مکان هر دو صفر بوده اند، $x_0 = v_0 = 0$ معادله مستقل از زمان را دو بار استفاده می نمایم:

$$x = 0 \text{ تا } x = 2m : v_{x=2m}^2 - v_{x=0}^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_{x=2m}^2 - 0 = 2 \times 3 \times 2 \Rightarrow v_{x=2m}^2 = 12$$

سپس:

$$x = 2m \text{ تا } x = 3m : v_{x=3m}^2 - v_{x=2m}^2 = 2a'\Delta x' \Rightarrow v_{x=3m}^2 - 12 = 2(-2)(1) \Rightarrow v_{x=3m}^2 = 8 \Rightarrow v_{x=3m} = 2\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۹۶ - گزینه ۴ نیروی کولنی باعث چرخش الکترون به دور هسته شده است:

$$F_r = F_q$$

$$mr(2\pi f)^2 = \frac{kq_1q_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow f^2 = \frac{kq_1q_2}{4\pi^2 m} \times \frac{1}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

۹۷ - گزینه ۳ ابتدا زمان رسیدن A به زمین، t_A را به دست می آوریم:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 80}{10}} = 4s \Rightarrow t_B = t_A - 1 = 3s$$

مسافتی که گلوله B طی می کند.

$$h_B = \frac{1}{2}gt^2 = 5 \times 3^2 = 45m$$

بیشترین فاصله دو گلوله زمانی است که A به زمین می رسد.

$$\Delta y = h_A - h_B = 80 - 45 = 35m$$

۹۸ - گزینه ۳

$$\text{تعداد گره} = n + 1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

$$f_n = nf_1 \Rightarrow 200 = 5f_1 \Rightarrow f_1 = 40Hz$$

$$f_3 = 3f_1 = 3 \times 40 = 120Hz$$

$$\frac{\lambda}{2} = \text{حداقل فاصله بین دو شکم متوالی}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda}{2} = 4cm \rightarrow \lambda = 8cm \\ n = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow L = \frac{n\lambda}{2} = \frac{5 \times 8}{2} = 20cm$$

طول موج اصلی تار:

$$\lambda_1 = \frac{2L}{n} = \frac{2 \times 20}{1} = 40cm$$

۹۹ - گزینه ۲

با ترکیب معادله فوتوالکتریک و رابطه انرژی جنبشی بیشینه داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{max} = \frac{1}{2}mv_m^2 = hf - W_0 \\ (f_0 : \text{ بسامد آستانه }) W_0 = hf_0 \text{ (تابع کار فلز) : از طرفی} \end{array} \right.$$

$$[h = 4 \times 10^{-15} \times 1,6 \times 10^{-19} = 6,4 \times 10^{-34} J \cdot s] ***$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = hf - hf_0 \Rightarrow \frac{1}{2}(9 \times 10^{-31})(v_m^2) = 4,125 \times 10^{-19} - (6,4 \times 10^{-34}) \cdot \left(\frac{5}{\lambda} \times 10^{15}\right)$$

$$\Rightarrow (4,5 \times 10^{-31})v_m^2 = 0,125 \times 10^{-19} \Rightarrow v_m^2 = \frac{0,125 \times 10^{-19}}{4,5 \times 10^{-31}} = \frac{10^{12}}{36} \Rightarrow v_m = \frac{1}{6} \times 10^6 \frac{m}{s}$$

*** دقت شود که باید ثابت پلانک را بر حسب $J \cdot s$ بنویسیم.

۱۰۰ - گزینه ۳ راه حل اول:

$$y_1 - y_2 = 100 \rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 100 \rightarrow \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2) = 100 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 100 \rightarrow t_1 + t_2 = 10$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1 - t_2 = 2 \\ t_1 + t_2 = 10 \end{array} \right\} \rightarrow 2t_1 = 12 \rightarrow t_1 = 6s$$

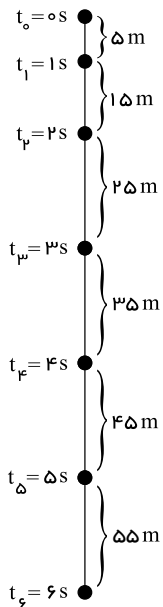
مدت زمان حرکت گلوله اول که زودتر به زمین رسیده است.

$$h = y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 = 180m$$

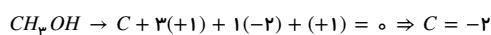
راه سریع تر: اگر گلوله را بدون سرعت اولیه رها کنیم، جابه جایی های گلوله در یک ثانیه های متوالی مطابق شکل مقابل است، بنابراین با توجه به حداکثر فاصله دو گلوله که $100m$ (۵۵ + ۴۵) است،

گلوله اول ۶s و گلوله دوم ۴s در حرکت بوده اند و ارتفاع کل برابر است با:

$$h = 5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 = 180m$$



۱۰۱ - گزینه ۲



عدد اکسایش اکسیژن در OF_2 برابر (+۲)، عدد اکسایش کلر در $HClO_4$ برابر (+۵) و عدد اکسایش نیتروژن در NH_4^+ (-۳) است.

۱۰۲ - گزینه ۱ انرژی شبکه ی بلور جامد یونی، با بار یون ها رابطه ی مستقیم و با شعاع یون ها رابطه ی معکوس دارد. هر چه شعاع یون ها بزرگ تر باشد، انرژی شبکه ی بلور کم تر است.

۱۰۳ - گزینه ۲ CO_2 دارای ساختار خطی و متقارن است $O = C = O$ و برآیند بردارهای قطبیت پیوند در آن ها برابر صفر است.

۱۰۴ - گزینه ۳

برای بدست آوردن غلظت هر ماده، تعداد مول آن را بر حجم ظرف یعنی ۳ لیتر تقسیم می کنیم.

غلظت NO و CO_2 برابر است (به دلیل برابر بودن ضریب استوکیومتری و فراورده بودن)

CO	$+$	NO_2	$\rightleftharpoons$	$CO_2(g)$	$+$	$NO(g)$	
x		y		o		o	غلظت اولیه
$-a$		$-a$		$+a$		$+a$	تغییر غلظت
$0,3$		$0,05$		$0,15$		$0,15$	غلظت تعادل

$$K = \frac{[0.15][0.15]}{[0.3][0.05]} = 1.5$$

۱۰۵ - گزینه ۴ به جز عبارت (پ)، بقیه عبارات درست‌اند.

در مورد عبارت (پ)، در سلول گالوانی (روی - مس)، مس کاتد (قطب مثبت) است و در کاتد عمل کاهش انجام می‌شود (منظور از رسانای یونی، محلول و منظور از رسانای الکترونی، الکترودها (کاتد و آنود) هستند).

۱۰۶ - گزینه ۱ در قدم اول باید pH محلول هیدروکلریک اسید را به دست آوریم. HCl یک اسید قوی است؛ بنابراین $\alpha = 1$ است.

$$[H_3O^+] = M \times \alpha = 0.6 \times 1 = 0.6 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$pH = -\log[H_3O^+] = -\log 0.6 = -\log(6 \times 10^{-1}) = -\log(2 \times 3 \times 10^{-1}) = -(0.3 + 0.5 - 1) = 0.2$$

با توجه به این که pH محلول HCl ، به اندازه ۴٫۱ واحد از pH محلول $HClO$ کوچک‌تر است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که محلول $HClO$ دارای $pH = 4.3$ است.

$$HClO \text{ محلول: } [H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-4.3} = 10^{-5+0.7} = 10^{-5} \times 10^{0.7} = 5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$(\alpha) \text{ درصد یونش } = \frac{درصد یونش (\alpha\%)}{100} = \frac{0.5}{100} = 5 \times 10^{-3}$$

$$[H_3O^+] = M \times \alpha \Rightarrow 5 \times 10^{-5} = M \times (5 \times 10^{-3}) \rightarrow M = 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

روش دوم:

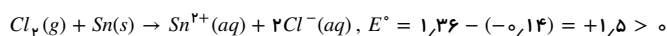
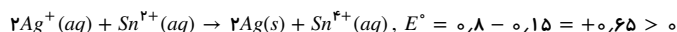
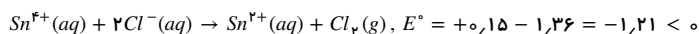
وقتی می‌گوییم pH محلول HCl ، ۴٫۱ واحد کوچک‌تر از $HClO$ است؛ یعنی غلظت یون هیدرونیوم در محلول HCl ، $10^{4.1}$ برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول $HClO$ است. پس از محاسبه درجه یونش (α) در روش اول، داریم:

$$\frac{[H_3O^+]_{HCl}}{[H_3O^+]_{HClO}} = \frac{C_M \alpha}{C_M \alpha} \Rightarrow \frac{0.6}{C_M \times 5 \times 10^{-3}} = 10^{4.1} = 10^{+5} \times 10^{-0.9} = 10^5 \times \frac{1}{8}$$

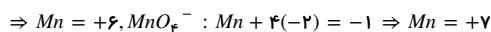
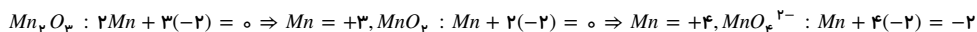
$$C_M = \frac{4.8}{5 \times 10^3} \approx 0.001$$

۱۰۷ - گزینه ۴ واکنش موجود در گزینه ۱، انجام نمی‌شود زیرا هر دو واکنش‌دهنده، نقش کاتد را ایفا می‌کنند و تمایل به گرفتن الکترون دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:



۱۰۸ - گزینه ۲ اعداد اکسایش متغیر در گونه‌های داده شده به صورت زیر است:

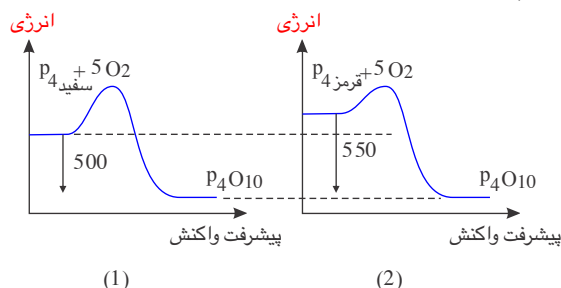


۱۰۹ - گزینه ۴

بررسی گزینه ۴: واکنش گرماده و با کاهش سطح انرژی همراه است؛ زیرا سطح انرژی فرآورده‌ها کمتر از واکنش‌دهنده‌ها است، اما نیاز به انرژی فعال سازی دارد.



۱۱۰ - گزینه ۲ با توجه به واکنش‌های سوختن فسفر سفید و قرمز می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد.



- ✓ پایداری P_4 سفید بیشتر قرمز P_4 است.
- ✓ تبدیل فسفر سفید به فسفر قرمز گرماگیر است.
- ✓ سطح انرژی P_4 سفید کمتر قرمز P_4 است.
- ✓ ΔH واکنش تبدیل فسفر سفید به فسفر قرمز 50 kJ است.

۱۱۱ - گزینه ۲

$$pH = -\log[H_3O^+] = -\log 5 \times 10^{-3} = -[\log 5 + \log 10^{-3}] = 2.3$$

۱۱۲ - گزینه ۱ ثابت یونش اسیدی H_2CO_3 کمتر از گزینه های دیگر است. پس این اسید کمتر از بقیه گزینه ها یونیده می شود و غلظت یون هیدروژن در محلول آن کمتر از بقیه اسیدها است.

اسیدهای قوی که K_a بسیار بزرگ دارند: $HNO_3, H_2SO_4, HCl, HBr, HI$

ترتیب قدرت اسیدی اسیدهای ضعیف در شرایط یکسان دما و غلظت:



۱۱۳ - گزینه ۴

ابتدا غلظت یون هیدرونیوم در محلول را محاسبه می کنیم:

$$[H_3O^+] = 10^{-pH} = 10^{-2.2} = 10^{-3+0.3+0.5} = 10^{-3} \times 10^{0.3} \times 10^{0.5} = 6 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

شمار مول یون هیدرونیوم برابر است با:

$$[H_3O^+] = \frac{\text{مول } H_3O^+}{\text{حجم محلول (L)}} \Rightarrow 6 \times 10^{-3} = \frac{\text{مول } H_3O^+}{0.1} \Rightarrow \text{مول } H_3O^+ = 6 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

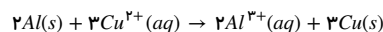
با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$O \text{ مول} = H_3O^+ \text{ مول} = 6 \times 10^{-4} \text{ mol}$$

حال می توان نوشت:

$$?gCO_2 = 6 \times 10^{-4} \text{ mol O} \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{2 \text{ mol O}} \times \frac{44 \text{ g } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 1.32 \times 10^{-2} \text{ g } CO_2$$

۱۱۴ - گزینه ۳ معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



جرم Cu تولید شده:

$$xgCu = 135gAl \times \frac{1 \text{ mol } Al}{27gAl} \times \frac{3 \text{ mol } Cu}{2 \text{ mol } Al} \times \frac{64gCu}{1 \text{ mol } Cu} = 480gCu$$

تعداد الکترون مبادله شده:

$$xe^- = 135gAl \times \frac{1 \text{ mol } Al}{27gAl} \times \frac{6 \text{ mole}^-}{2 \text{ mol } Al} \times \frac{6.02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mole}^-} = 9.93 \times 10^{23} e^-$$

۱۱۵ - گزینه ۳ ابتدا مول اسید مصرف شده را تعیین می کنیم:

$$?molHCl = 11.2gFe \times \frac{1 \text{ mol } Fe}{56gFe} \times \frac{2 \text{ mol } HCl}{1 \text{ mol } Fe} = 0.4 \text{ mol } HCl$$

غلظت هیدروکلریک اسید برابر است با:

$$[HCl] = \frac{\text{مول } HCl}{\text{حجم محلول (L)}} \Rightarrow [HCl] = \frac{0.4 \text{ (mol)}}{1 \text{ (L)}} = 0.4 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

هیدروکلریک اسید یک اسید قوی است $\Leftrightarrow \alpha = 1$

در نهایت، pH محلول برابر است با:

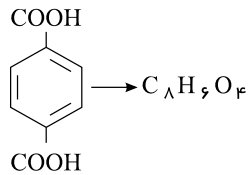
$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = -\log 0.4 = -[2 \log 2 + \log 0.1] = 0.4$$

۱۱۶ - گزینه ۴ برای نوشتن عبارت ثابت تعادل کافی است غلظت موارد گازی یا محلول فرآورده ها را در صورت کسر بنویسیم «به توان ضریب» و غلظت واکنش دهنده های گازی یا محلول را نیز در مخرج کسر بنویسیم «به توان ضریب».

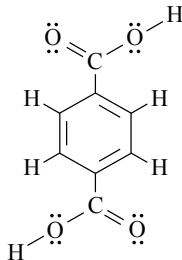
$$K = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3}$$

۱۱۷ - گزینه ۴ عبارت اول درست است.

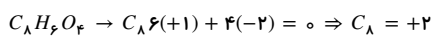
عبارت دوم درست است:



عبارت سوم درست است. در ساختار آن ۲۳ پیوند کووالانسی و ۱۶ الکترون ناپیوندی وجود دارد:



عبارت چهارم نادرست است:



عبارت پنجم درست است.

۱۱۸ - گزینه ۲ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: با افزودن ترکیب سدیم فسفات به مواد شوینده، قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها در آب سخت افزایش می‌یابد.

گزینه ۳: صابون‌های طبیعی، افزودنی شیمیایی ندارند و به دلیل خاصیت بازی، برای موهای چرب مناسب هستند.

گزینه ۴: برای افزایش خاصیت ضد عفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها می‌توان از ترکیبات کلردار استفاده کرد.

۱۱۹ - گزینه ۴

$$\text{صابون } 9,18 \text{ kg} = \frac{40 \text{ g عملی}}{100 \text{ g نظری}} \times \frac{1 \text{ kg صابون}}{1000 \text{ g}} \times \frac{306 \text{ g صابون}}{1 \text{ mol صابون}} \times \frac{3 \text{ mol صابون}}{1 \text{ mol چربی}} \times \frac{1 \text{ mol چربی}}{890 \text{ g چربی}} \times \frac{1000 \text{ g چربی}}{1 \text{ kg چربی}} = 22,25 \text{ kg چربی} = \text{صابون } 22,25 \text{ kg}$$

۱۲۰ - گزینه ۳ موارد الف و ب، درست‌اند.

با توجه به پُر نور بودن لامپ، این محلول می‌تواند محلول یک اسید یا باز قوی باشد.

بررسی موارد:

مورد الف: اگر اسید باشد، اسید قوی با ثابت یونش بسیار بزرگ‌تر از ثابت یونش اسید موجود در ریواس است زیرا، اسید موجود در ریواس اسیدی ضعیف است.

مورد ب: از حل شدن لیتیم اکسید و باریم اکسید در آب به ترتیب، بازهای قوی لیتیم هیدروکسید و باریم هیدروکسید به وجود می‌آید.

مورد پ: HF اسیدی ضعیف است.

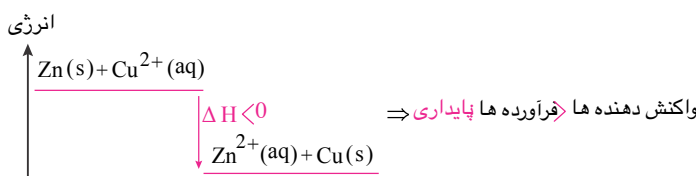
مورد د: تنها در صورتی A محلولی با pH کمتر از ۷ است که A یک اسید باشد. در این سؤال ممکن است ماده A یک باز قوی باشد، پس این عبارت الزاماً صحیح نیست.

۱۲۱ - گزینه ۴ بررسی نادرست:

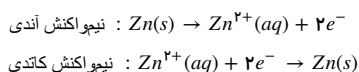
گرافیت یک جامد کووالانسی با چینش دوبعدی اتم‌ها است. الماس، از سوی دیگر، جامدی کووالانسی با چینش سه‌بعدی اتم‌ها است.

۱۲۲ - گزینه ۴ به‌جز عبارت اول، بقیه عبارت‌ها نادرست‌اند.

عبارت اول: شکل (آ) یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد. در یک سلول گالوانی یک واکنش خودبه‌خودی انجام می‌شود و سطح انرژی فرآورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است. ($\Delta H < 0$).



عبارت دوم: شکل (ب) یک سلول الکترولیتی است. این سلول در واقع فرایند آبکاری مس با فلز روی را نشان می‌دهد:



در آند فلز روی خورده می‌شود ($\text{Zn(s)} \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2e^-$) و در کاتد، یون‌های Zn^{2+} موجود در محلول با گرفتن الکترون بر سطح کاتد (فلز مس) می‌نشینند

($\text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2e^- \rightarrow \text{Zn(s)}$) پس واکنش انجام‌شده در شکل (ب) عکس واکنش انجام‌شده در شکل (آ) نیست.

عبارت سوم: در شکل (ب) غلظت یون $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ تقریباً ثابت است. چون همان مقدار که در کاتد، یون‌های $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ مصرف می‌شوند، همان مقدار در آند تشکیل می‌شوند. اما در شکل (آ)،

غلظت یون $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ در حال افزایش است.

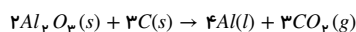
عبارت چهارم: در شکل (آ) یون‌های $\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ و در شکل (ب) یون‌های $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ کاهش‌یافته و بر سطح کاتد می‌نشینند. اگرچه با عبور مقدار یکسانی الکترون، تعداد یکسانی از یون‌های

$\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$ و $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$ کاهش می‌یابند (هر کدام از این یون‌ها با گرفتن ۲ الکترون به صورت اتم‌های Cu و Zn درمی‌آیند) اما جرم مولی این دو تفاوت دارد. پس افزایش جرم تیغه کاتد در این

دو سلول متفاوت است.

۱۲۳ - گزینه ۴ عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

در سلول الکترولیتی فرایند هال، آند و کاتد هر دو از جنس گرافیت هستند و واکنش انجام شده در آن به صورت زیر است:



اکنون به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

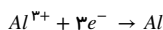
عبارت اول: به دلیل حرارت زیاد ظرف واکنش، گاز اکسیژن تولید شده در آند، با خود آند (یعنی گرافیت) واکنش داده و به صورت گاز CO_2 از محیط خارج می‌شود.

عبارت دوم: چگالی آلومینیم مذاب تولید شده از الکترولیت مذاب بیش تر است، لذا در ته ظرف واکنش قرار می‌گیرد.

عبارت سوم: مجموع ضرایب واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها برابر ۱۲ است.

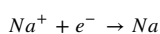
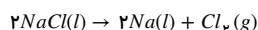
عبارت چهارم: به دو دلیل این واکنش از نگاه محیط زیست مطلوب نیست:

اولاً: گاز CO_2 تولید می‌کند (رد پای CO_2 را افزایش می‌دهد). ثانیاً: برای ذوب کردن الکترولیت انرژی الکتریکی بسیار زیادی لازم است که البته می‌دانید این برق مصرفی عمدتاً از سوخت‌های فسیلی تأمین می‌شود.



عبارت پنجم به طور خلاصه، نیم‌واکنش کاتدی را به صورت زیر می‌توان در نظر گرفت:

یعنی به ازای تشکیل ۱ مول Al (معادل ۲۷ گرم Al) ۳ مول الکترون مبادله می‌شود. واکنش انجام شده در سلول برق‌کافت سدیم کلرید مذاب به صورت زیر است:



که آن را به صورت روبه‌رو می‌توان در نظر گرفت:

$$1620 \text{ kg Al} \times \frac{10^3 \text{ g Al}}{1 \text{ kg Al}} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol Al}} \times \frac{1 \text{ mol Na}}{1 \text{ mole}^-} \times \frac{23 \text{ g Na}}{1 \text{ mol Na}} \times \frac{1 \text{ kg Na}}{10^3 \text{ g Na}} = 4140 \text{ kg Na}$$

۱۲۴ - گزینه ۳ معادله موازنه‌شده این واکنش به صورت $(2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2)$ است. ابتدا باید غلظت $NaOH$ را به دست آوریم. برای این منظور باید ابتدا pH محلول را محاسبه کنیم:

$$K_a = \alpha^2 \cdot M \Rightarrow 6.25 \times 10^{-8} = (1.25 \times 10^{-3})^2 \times M \Rightarrow M = 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$[H^+] = M \cdot \alpha = 4 \times 10^{-2} \times 1.25 \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(5 \times 10^{-5})$$

$$= -\log 10^{-5} - \log 5 = 5 - 0.7 = 4.3$$

pH محلول $NaOH$ سه برابر pH محلول HF است:

$$pH_{NaOH} = 3 \times 4.3 = 12.9$$

$$pOH + pH = 14 \Rightarrow pOH = 14 - 12.9 = 1.1$$

$$\Rightarrow [OH^-] = 10^{-pOH} = 10^{-1.1} = 10^{-2} \times 10^{0.9}$$

$$= 10^{-2} \times 10^{0.9} = 10^{-2} \times 8 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

با توجه به این که $NaOH$ یک باز قوی است، در آن $[OH^-]$ با غلظت محلول $NaOH$ برابر است. بنابراین غلظت محلول $NaOH$ برابر با $8 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ است. تعداد مول $NaOH$ در این

محلول برابر است با:

$$M = \frac{\text{mol}}{V} \Rightarrow 8 = \frac{\text{mol NaOH}}{400 \text{ mL} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}} \Rightarrow \text{mol NaOH} = 0.32$$

$$\text{mol H}_2 = 0.32 \text{ mol NaOH} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol NaOH}} = 0.16 \text{ mol H}_2$$

$$\bar{R}_{H_2} = \frac{\Delta n_{H_2}}{\Delta t} \Rightarrow 2 \times 10^{-2} = \frac{0.16}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \Delta t = 0.8 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 48 \text{ s}$$

گزینه ۲: آهک (CaO): یونی یخ خشک ($CO_{2(s)}$): مولکولی پلاتین (Pt): فلزی
گزینه ۴: سیلیس یک جامد کووالانسی با شمار بسیار زیادی از اتم‌های Si و O می‌باشد که با پل‌های $Si - O - Si$ ساختاری همانند کندوی عسل به وجود آورده است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۲۰ - ۴	۳۹ - ۴	۵۸ - ۴	۷۷ - ۲	۹۶ - ۴	۱۱۵ - ۳
۲ - ۱	۲۱ - ۳	۴۰ - ۴	۵۹ - ۳	۷۸ - ۴	۹۷ - ۳	۱۱۶ - ۴
۳ - ۱	۲۲ - ۴	۴۱ - ۱	۶۰ - ۱	۷۹ - ۲	۹۸ - ۳	۱۱۷ - ۴
۴ - ۴	۲۳ - ۲	۴۲ - ۳	۶۱ - ۱	۸۰ - ۲	۹۹ - ۲	۱۱۸ - ۲
۵ - ۱	۲۴ - ۳	۴۳ - ۳	۶۲ - ۳	۸۱ - ۲	۱۰۰ - ۳	۱۱۹ - ۴
۶ - ۴	۲۵ - ۳	۴۴ - ۲	۶۳ - ۳	۸۲ - ۱	۱۰۱ - ۲	۱۲۰ - ۳
۷ - ۴	۲۶ - ۲	۴۵ - ۲	۶۴ - ۳	۸۳ - ۲	۱۰۲ - ۱	۱۲۱ - ۴
۸ - ۳	۲۷ - ۲	۴۶ - ۱	۶۵ - ۳	۸۴ - ۱	۱۰۳ - ۲	۱۲۲ - ۴
۹ - ۲	۲۸ - ۱	۴۷ - ۴	۶۶ - ۳	۸۵ - ۳	۱۰۴ - ۳	۱۲۳ - ۴
۱۰ - ۱	۲۹ - ۱	۴۸ - ۱	۶۷ - ۱	۸۶ - ۲	۱۰۵ - ۴	۱۲۴ - ۳
۱۱ - ۴	۳۰ - ۴	۴۹ - ۲	۶۸ - ۲	۸۷ - ۲	۱۰۶ - ۱	۱۲۵ - ۲
۱۲ - ۴	۳۱ - ۳	۵۰ - ۱	۶۹ - ۱	۸۸ - ۳	۱۰۷ - ۴	۱۲۶ - ۲
۱۳ - ۳	۳۲ - ۲	۵۱ - ۲	۷۰ - ۱	۸۹ - ۴	۱۰۸ - ۲	۱۲۷ - ۳
۱۴ - ۱	۳۳ - ۳	۵۲ - ۱	۷۱ - ۲	۹۰ - ۳	۱۰۹ - ۴	۱۲۸ - ۳
۱۵ - ۲	۳۴ - ۱	۵۳ - ۳	۷۲ - ۴	۹۱ - ۴	۱۱۰ - ۲	۱۲۹ - ۳
۱۶ - ۲	۳۵ - ۴	۵۴ - ۱	۷۳ - ۳	۹۲ - ۲	۱۱۱ - ۲	۱۳۰ - ۳
۱۷ - ۲	۳۶ - ۴	۵۵ - ۲	۷۴ - ۲	۹۳ - ۱	۱۱۲ - ۱	
۱۸ - ۳	۳۷ - ۳	۵۶ - ۱	۷۵ - ۳	۹۴ - ۲	۱۱۳ - ۴	
۱۹ - ۲	۳۸ - ۴	۵۷ - ۱	۷۶ - ۱	۹۵ - ۲	۱۱۴ - ۳	

