نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: اختصاصی ریاضی - ۱۰۸۱۲

ام اس بوک

۱ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد h تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است h کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ - تابع f با ضابطه‌ی مقابل در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x+1 & 0\le x<1 \end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر
۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر
۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

۳ - مبدأ مختصات برای چه تعداد از توابع $y_1=x[-x^2]$، $y_2=x^2[x]$ و $y_3=x[-x]$ یک نقطهٔ گوشه‌ای است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴ - در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\ge 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$، مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1-\sqrt{2})$ کدام می باشد؟

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

۵ - تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{a\sqrt{x}-b}{x} & x\ge 1 \\ bx^3+ax+2 & x<1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۶ - زاویهٔ بین نیم‌مماس‌های چپ و راست تابع $f(x)=\begin{cases} \tan x & x\ge 0 \\ \frac{x}{\sqrt{3}}\cos x & x<0 \end{cases}$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{11\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{12}$ ۳) $\frac{7\pi}{12}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۷ - مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$ ۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{\frac{2}{3},2\}$

۸ - اگر $f(x)=Max\{|2x|,|x+1|\}$، آنگاه مینیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

۹ - تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-2|(x^2+1)$ را با a و تعداد نقاط بحرانی تابع $g(x)=\frac{2x-1}{x+4}$ را با b نمایش می‌دهیم. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰ - کدام‌یک از توابع زیر در نقطهٔ $x=0$ دارای «مماس قائم» است؟

۱) $f(x)=[x]$ ۲) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$ ۳) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ۴) $f(x)=\sqrt{x}$

۱۱ - ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=2-\sqrt[3]{(x-3)^2}$ با دامنهٔ $D_f=[-5,4]$ کدام است؟

۱) $\min=1$ مطلق و $\max=2$ مطلق
۲) $\min=-2$ مطلق و $\max=1$ مطلق
۳) $\min=-1$ مطلق و $\max=1$ مطلق
۴) $\min=-2$ مطلق و $\max=2$ مطلق

۱۲ - $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه سوم است، به طوری که $x = x_1$ ریشه مضاعف معادله $P(x) = 0$ است و $x = x_2$ ریشه‌ی ساده آن می‌باشد. نقطه $x = x_1$ چه نقطه‌ای برای $f(x) = \sqrt[3]{P(x)}$ است؟

① عطف قائم ② عطف افقی ③ بازگشت ④ max نسبی

۱۳ - مقدار ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \min\left\{4x - x^2, |x - 4|\right\}$ کدام است؟

① ۱ ② ۳ ③ ۴ ④ ماکزیمم مطلق ندارد .

۱۴ - اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = x^2 + x$ آنگاه برد تابع $gof(x)$ کدام است؟

① $[-\frac{1}{4}, 0]$ ② $[0, \frac{1}{4}]$ ③ $[-\frac{1}{4}, 0)$ ④ $(0, \frac{1}{4}]$

۱۵ - تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{1 + |x|}$ در $x = 0$ واقع بر منحنی کدام است؟

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ ۲ ④ $\frac{4}{3}$

۱۶ - در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b[3x] & x < 1 \\ \frac{c}{x^2} + 1 & x \geq 1 \end{cases}$، $f'(1) = 2$، حاصل abc کدام است؟

① -2 ② ۲ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$

۱۷ - تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 1} \frac{f^3(x) - 8}{x - 1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1 + mh) - 2}{h}$ است. مقدار m کدام است؟

① ۶ ② ۱۲ ③ ۴ ④ ۸

۱۸ - دربارهٔ max و min مطلق تابع $f(x) = x[\cos \frac{\pi}{2}x]$ در بازهٔ $(2, 4]$ کدام صحیح است؟

① ماکزیمم دارد ولی مینیمم ندارد. ② مینیمم دارد ولی ماکزیمم ندارد. ③ نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم. ④ هم ماکزیمم دارد و هم مینیمم.

۱۹ - تابع $f(x) = \begin{cases} x[\cos \frac{\pi}{2}x] & 1 \leq x < 3 \\ a & x = 3 \end{cases}$ دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است. حدود کدام a است؟

① $a \geq 0$ ② $a \leq -2$ ③ $a \leq -3$ ④ $a \geq 1$

۲۰ - مشتق چپ و راست تابع f در نقطه $x = 0$، یکی متناهی و دیگری نامتناهی است. ضابطهٔ f کدام می‌تواند باشد؟

① $x\sqrt[3]{x}$ ② $|x|\sqrt[3]{x}$ ③ $[x]\sqrt[3]{x}$ ④ $x^2\sqrt[3]{x}$

۲۱ - چند نقطه روی خط $y = x + 1$ یافت می‌شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $B(2 \text{ و } 1)$ و $A(1 \text{ و } 0)$ برابر ۲ باشد: $(MA + MB = 2)$

① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ بی‌شمار

۲۲ - فاصله‌ی کانون سهمی $y^2 = 8x + 4y + 12$ تا نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ ۲

۲۳ - به موازات کدام خط نمی توان هیچ مماسی بر سهمی $y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ رسم کرد؟

① $x = 1$ ② $y = x$ ③ $y = -x$ ④ $y = 2$

۲۴ - به ازای کدام مقدار m در معادله‌ی سهمی $y = x^2 - 4x + m$ طول وتر کانونی برابر ۱ است؟

① به مقدار m بستگی ندارد ② $+5$ ③ -5 ④ $\frac{1}{4}$

۲۵ - اگر نقطه ی $A(۲,۳)$ روی یک سهمی افقی با کانون $(۲,۰)$ باشد، آن گاه کدام یک از خطوط زیر می تواند خط هادی این سهمی باشد؟

① $x=+۳$ ② $x=-۳$ ③ $x=۲$ ④ $x=-۱$

۲۶ - اگر $F(۱,۵)$ کانون سهمی $x^۲-۲x-۴y=-۲k+۱$ باشد، k کدام است؟

① ۱۳ ② ۹ ③ ۱۰ ④ ۱

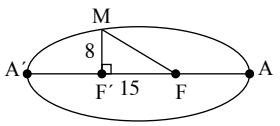
۲۷ - اگر زاویه بین خطی که کانون و رأس ناکانونی را به هم وصل می کند و محور کانونی ۶۰° باشد طول وتر کانونی کدام است؟ ($۲b$ قطر کوچک بیضی است)

① $\frac{\sqrt{۳}}{۲}b$ ② $۳b$ ③ $\frac{۲}{\sqrt{۳}}b$ ④ $\sqrt{۳}b$

۲۸ - نقطه $M(x,y)$ طوری حرکت می‌کند، که همواره فاصله آن از نقطه $(۲,-۱)$ برابر، $\frac{۲}{۳}$ فاصله آن از خط $y=۴$ است. کوتاهترین فاصله نقاط M تا خط $y=۴$، کدام است؟

① ۲ ② ۲٫۵ ③ ۳ ④ ۳٫۵

۲۹ - در شکل مقابل نسبت طول قطر بزرگ به قطر کوچک بیضی کدام است؟

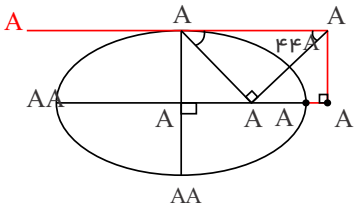


① ۱٫۲۵ ② ۱٫۵ ③ ۱٫۷۵ ④ ۲

۳۰ - در یک بیضی با قطر بزرگ ۱۸ و فاصلهٔ کانونی ۶، خط عمود بر قطر بزرگ در کانون F بیضی را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ محل برخورد خط مماس بر بیضی در نقطهٔ M با محور کانونی تا نزدیک ترین نقطهٔ بیضی کدام است؟

① ۶ ② ۱۸ ③ ۹ ④ ۲۷

۳۱ - در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F=۴۵^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟



① $\sqrt{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}$ ④ $\frac{۱}{۲}$

۳۲ - مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از خط $x=۳$ دو واحد بیشتر از فاصلهٔ آن‌ها از نقطه‌ای به طول -۱ روی محور xها است، کدام می‌باشد؟

① $y^۲=۱۲(x+۲)$ ② $y^۲=۱۲(x-۲)$ ③ $y^۲=۴x$ ④ $y^۲=-۴x$

۳۳ - اگر معادلهٔ خط هادی سهمی $y^۲=\frac{۲m}{۳}y+۳x+۱$ به صورت $x=-\frac{۱۷}{۱۲}$ باشد، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

① ±۱ ② ±۲ ③ ±۳ ④ ±۴

۳۴ - در داخل یک سهمی با بدنهٔ آینه‌ای، اشعهٔ نوری که از کانون می‌گذرد و با محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد بر آن تابانده می‌شود. اگر معادلهٔ سهمی $x^۲+۱۰x+۲۰y-۷۵=۰$ باشد، آن‌گاه معادله خط بازتاب پرتو کدام است؟

① $x=۱۰\sqrt{۲}-۱۵$ ② $x=۲\sqrt{۲}-۱۵$ ③ $x=-۵$ ④ $x=۱۰-۱۵\sqrt{۲}$

۳۵ - سهمی $y=x^۲-۲$ و دایرهٔ $x^۲+(y+۳)^۲=۱$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

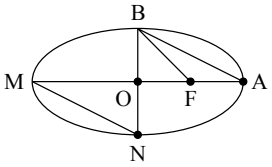
① در چهار نقطه متقاطع‌اند. ② در دو نقطه متقاطع‌اند. ③ یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. ④ بر هم مماس‌اند.

۳۶- اگر خط $y = ax + b$ در راس سهمی $3x^2 + 6x + my + 11 = 0$ بر آن مماس باشد و دهانه سهمی به سمت پایین باز شود و فاصله کانون تا راس سهمی برابر $\frac{2}{3}$ باشد حاصل $a - b$ کدام است؟

① ۲ ② ۱ ③ -1 ④ -2

۳۷- فاصله بین کانون و خط هادی در سهمی گذرا بر سه نقطه $M(1,-2), N(1,4)$ و $P(-3,1)$ کدام است؟

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$



۳۸- در شکل خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{5}{6}$ است. حاصل $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BOF}} + S_{\overset{\triangle}{MON}}}$ کدام است؟ (F کانون بیضی است)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{11}$ ④ $\frac{1}{12}$

۳۹- خطی که در کانون سهمی به معادلهٔ $y^2 - 2y - 4x + 5 = 0$ بر محور تقارن آن عمود است، سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله یکی از این نقاط تا رأس سهمی کدام است؟

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2}$

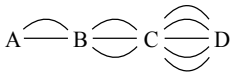
۴۰- مساحت چهارضلعی حاصل از وصل کردن دو سر قطر کوچک به دو سر قطر بزرگ یک بیضی برابر ۹۰ واحد مربع و فاصلهٔ بین دو کانون آن $8\sqrt{3}$ واحد می‌باشد. خروج از مرکز آن کدام است؟

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴۱- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز می توان ساخت؟

① ۳۲ ② ۲۰ ③ ۵۲ ④ ۱۲

۴۲- در شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از A به D رفت و برگشت به طوری‌که مسیر رفت و برگشت باهم متفاوت باشند؟ (تمام مسیرها دوطرفه است.)



① ۹ ② ۸۹۹ ③ ۸۷۰ ④ ۱۰

۴۳- با ارقام ۰ ,۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

① ۴۰ ② ۶۰ ③ ۸۰ ④ ۱۲۰

۴۴- حاصل عبارت زیر با کدام گزینه برابر است؟

$$\binom{21}{3} + \binom{21}{4} + \binom{21}{5} + \cdots + \binom{21}{18}$$

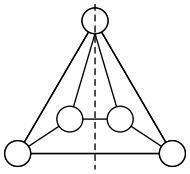
① $2^{21} - 44$ ② $2^{21} - 464$ ③ $2^{21} - 640$ ④ $2^{21} - 460$

۴۵- چند عدد طبیعی بین ۹ و ۱۰۰۰ می توان ساخت که حاصل ضرب رقم های آن فرد باشد؟

① ۱۲۵ ② ۲۷۵ ③ ۱۵۰ ④ ۲۲۵

۴۶- ۶ زوج (زن و شوهر) می خواهند دور یک میز بنشینند. در چند حالت آقایان یکی در میان می نشینند؟

① $5!5!$ ② $5!6!$ ③ $6!6!$ ④ $11!$



۴۷ - می خواهیم با ۵ مروارید به رنگ های مختلف یک گردنبند به شکل مقابل بسازیم.این کار به چند طریق ممکن است؟ (خط چین محور تقارن شکل است.)

① $۴!$ ② $۵!$ ③ $\frac{۴!}{۲}$ ④ $\frac{۵!}{۲}$

۴۸ - به چند حالت می توان دو خانه با مجموع ۱۱ از خانه های یک مربع لاتین مرتبهٔ ۷ انتخاب کرد؟

① ۴۹ ② ۸۱ ③ ۶۴ ④ ۹۸

۴۹ - سارا روی کاغذ چند عدد طبیعی متمایز کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ نوشت. حاصل‌ضرب این عددها بر ۱۸ بخش‌پذیر نیست. سارا حداکثر چند عدد می‌تواند نوشته باشد؟

① ۵ ② ۱۷ ③ ۶۸ ④ ۶۹

۵۰ - می‌خواهیم با حروف a, b, c, d ارقام ۲، ۴، ۶، ۸ یک رمز شامل ۳ حرف و دو رقم تشکیل دهیم که ۳ حرف همواره کنارهم باشند. تعداد حالت‌های مطلوب کدام است؟

① ۱۴۴ ② ۱۲۹۶ ③ ۲۱۶ ④ ۸۶۴

۵۱ - با ارقام ۸، ۶، ۵، ۵، ۴، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ چند عدد فرد و ۹ رقمی می‌توان ساخت؟

① ۵۰۴۰ ② ۴۰۴۲ ③ ۳۳۶۰ ④ ۵۲۲۰

۵۲ - با ارقام عدد ۱۲۴۲۵۴۷۲ چند عدد هشت رقمی می‌توان ساخت به طوریکه ارقام یکسان یکجا کنار هم نباشند؟ (یعنی دو تا ۴ کنار هم نباشند و سه تا دو کنار هم نباشند ولی اگر فقط دو تا از ۲ها کنار هم باشند مشکلی نیست)

① ۳۲۴۰ ② ۴۰۲۰۰ ③ ۱۹۲۰ ④ ۳۸۸۸۰

۵۳ - یک گروه ۶ نفره وارد یک هتل شده‌اند که دو اتاق ۳ نفره، سه اتاق ۲ نفره و دو اتاق یک نفره خالی دارد. اعضای این گروه به چند طریق می‌توانند دقیقاً در ۳ اتاق این هتل اقامت کنند؟ (ظرفیت هر اتاق باید کاملاً استفاده شود.)

① ۹۰ ② ۲۷۰ ③ ۷۲۰ ④ ۸۱۰

۵۴ - دو مربع لاتین A و B متعامدند. دوتایی (b, a) کدام است؟

۳	۴		۵	
b	۳	۴		a
	۲		۴	۱
۱		۲	۳	
	۱	۵		۳

۴	۱	۵	۲	۳
۱	۵	۲	۳	۴
۵	۲	۳	۴	۱
۲	۳	۴	۱	۵
۳	۴	۱	۵	۲

① $(۲, ۴)$ ② $(۳, ۴)$ ③ $(۲, ۵)$ ④ $(۳, ۵)$

۵۵- هرگاه $P(n,۲) - C(n,۲) = ۲۸$ باشد، حاصل $C(n,۳) + C(n,۴)$ کدام است؟

① $\binom{۹}{۵}$ ② $\binom{۱۰}{۴}$ ③ $\binom{۹}{۳}$ ④ $\binom{۸}{۴}$

۵۶- ریسمانی به طول یک متر بین دو نقطه محکم شده است و نیروی کشش آن F و بسامد صوت حاصل ۵۰ هرتز است و در طول آن یک شکم ایجاد شده است. اگر بخواهیم در طول آن ۲ شکم ایجاد کنیم، نیروی کشش را باید چند برابر کنیم؟

① ۴ ② $\frac{۱}{۲}$ ③ ۲ ④ $\frac{۱}{۴}$

۵۷- اگر در اتم هیدروژن الکترون در مدار مجاز $n = ۴$ باشد امکان تابش چند طول موج برای آن وجود دارد؟ (با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن)

① ۵ ② ۶ ③ ۳ ④ ۴

۵۸- در اتم هیدروژن الکترون از مدار n_U به n_L می‌رود و نوری با بسامد $۵۶۲/۵\ THz$ تابش می‌کند. n_U و n_L به‌ترتیب کدام‌اند؟ ($c = ۳ \times ۱۰^{۸} \frac{m}{s}, R = ۰/۰۱ nm^{-۱}$)

① ۲ و ۱ ② ۳ و ۱ ③ ۴ و ۲ ④ ۵ و ۳

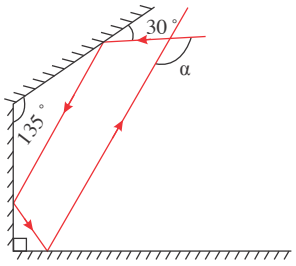
۵۹- اگر توان خروجی یک منبع صوتی ۴π وات باشد و آن منبع صوت را به طور یکنواخت در تمام جهات منتشر سازد تراز شدت صوتی در فاصلهٔ ۱۰ متر از منبع چند دسی‌بل است؟ (تراز مرجع $۱۰^{-۱۲} W/m^{۲}$)

① ۱۰ ② ۱۰۰ ③ ۱۰۰۰ ④ ۱۰۰۰۰

۶۰- اگر گیرنده‌ای را که در فاصلهٔ مشخص از یک فرستندهٔ صوتی با جبههٔ موج کروی قرار دارد. ۳ متر از آن دورتر کنیم. تراز شدت صوت دریافتی به مقدار قرینهٔ حالتی که آن را به اندازهٔ ۲ متر به منبع نزدیک کنیم تغییر می‌کند. گیرنده در چند متری از منبع قرار دارد؟

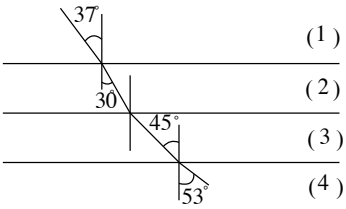
① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۶۱- در شکل روبه‌رو α چند درجه است؟



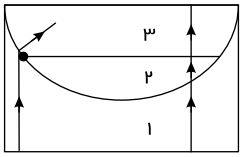
① ۱۱۵
② ۱۲۰
③ ۱۲۵
④ ۱۳۰

۶۲- مطابق شکل زیر پرتو نوری از محیط شفاف (۱) وارد محیط (۲)، سپس وارد محیط (۳) و در نهایت وارد محیط (۴) می‌شود. سرعت نور در محیط (۴) چند برابر سرعت نور در محیط (۱) است؟



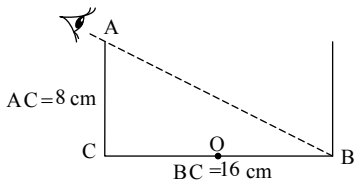
① $\frac{۴}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ④ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶۳- در پرتو تک‌رنگ مشابه شکل زیر از محیط ۱، می‌تابد. باتوجه به نحوهٔ عبور نور از هر سه محیط، کدام‌یک از روابط زیر دربارهٔ ضریب شکست‌ها درست است؟



① $n_۱ = n_۲ = n_۳$ ② $n_۱ = n_۲$ و $n_۲ > n_۳$
③ $n_۱ = n_۲$ و $n_۲ < n_۳$ ④ $n_۲ = n_۳$ و $n_۱ > n_۲$

۶۴- مطابق شکل زیر، چشم ناظری در وضعیتی قرار دارد که فقط می‌تواند پایین دیوارهٔ مقابل ظرف (نقطهٔ B) را ببیند. ظرف را پر از مایعی می‌کنیم. ناظر در همان وضعیت قبل قادر به دیدن نقطهٔ O وسط BC می‌شود. ضریب شکست نسبی مایع نسبت به هوا چقدر است؟



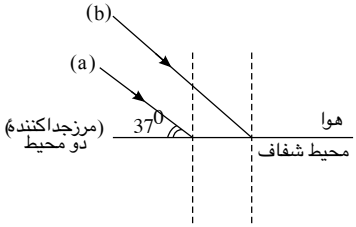
۱) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

۳) $\sqrt{\frac{۸}{۵}}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۶۵- به داخل یک توده گاز هیدروژن معمولی، الکترون‌های پر انرژی با انرژی ۱۲٫۷۵ الکترون‌ولت گسیل می‌شوند. احتمال تولید کدام خط طیفی وجود دارد؟ $(E_R = ۱۳٫۶\ eV)$

۱) خط اول، دوم و سوم رشتهٔ لیمان ۲) خط اول و دوم رشتهٔ بالمر ۳) خط اول رشتهٔ پاشن ۴) هر سه مورد ممکن است گسیل گردد.

۶۶- در شکل داده شده، دو پرتو تک‌رنگ (a) و (b) از هوا به‌طور مایل و موازی یکدیگر به سطح محیط شفافی تابیده شده‌اند. پس از شکست، دو پرتو، درون محیط شفاف یکدیگر را قطع کرده و باهم زاویهٔ ۷° می‌سازند. تندی انتشار پرتو (b) در محیط شفاف چند (m/s) است؟ (ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو $\alpha = \frac{۴}{۳}$، $c = ۳ \times ۱۰^۸ m/s$) ($\sin ۳۷^\circ = \cos ۵۳^\circ = ۰٫۶$ ، $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$)



۱) $\frac{۱۵}{۴}\sin ۴۶^\circ \times ۱۰^۸$ ۲) $\frac{۸}{۵} \times ۱۰^۸$

۳) $\frac{۱۵}{۸} \times ۱۰^۸$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}\sin ۴۶^\circ \times ۱۰^۸$

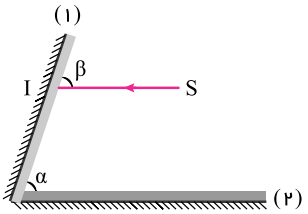
۶۷- پرتوهای موازی A و B با فاصلهٔ $\Delta_۱ = ۱۰cm$ از یکدیگر از محیطی به ضریب شکست $n_۱$ با زاویهٔ $\theta_۱ = ۳۷^\circ$ نسبت به سطح جداکننده در محیط، وارد محیطی به ضریب شکست $n_۲$ می‌شود، اگر فاصلهٔ دو پرتو پس از شکست به $\Delta_۲ = ۷٫۵cm$ برسد، نسبت $\frac{n_۲}{n_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶۸- عقرب‌های ماسه‌ای وجود طعمه را با امواجی که براثر حرکت طعمه در ساحل شنی ایجاد می‌شود حس می‌کنند. این امواج که در سطح ماسه منتشر می‌شوند بر دو نوع امواج عرضی با سرعت $۲۰\frac{m}{s}$ و امواج طولی با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ هستند. عقرب ماسه‌ای می‌تواند با استفاده از اختلاف زمانی بین زمان رسیدن این امواج به نزدیک‌ترین پاهای خود، فاصلهٔ خود را تا طعمه حس کند. اگر هنگامی که عقرب ساکن است، اختلاف زمانی برابر با $\Delta t = ۳s$ باشد؛ در صورتی که عقرب با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ حرکت کند چند ثانیه طول می‌کشد تا به طعمه برسد؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۵

۶۹- در شکل روبه‌رو زاویه‌های α و β چه رابطه‌ای داشته باشند تا زاویه انحراف پرتو SI در نهایت ۱۸۰° شود؟



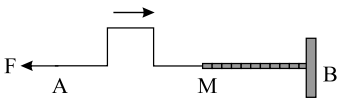
۱) $\alpha = \beta$ ۲) $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$

۳) $\alpha = ۲\beta$ ۴) $\alpha - \beta = ۹۰^\circ$

۷۰- طول موج پنجمین خط طیف اتم هیدروژن در رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$ تقریباً چند نانومتر است و این خط در کدام گسترهٔ طیف موج‌های الکترومغناطیسی قرار دارد؟ $(R = ۰٫۰۱۱(nm)^{-1})$

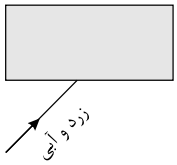
۱) ۴۳۳، مرئی ۲) ۴۳۳، فرابنفش ۳) ۳۹۶، فروسرخ ۴) ۳۹۶، فرابنفش

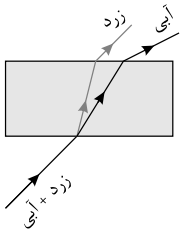
۷۱ - در شکل زیر، دو طناب هم‌جنس که قطر یکی ۲ برابر قطر دیگری است در نقطه M به هم متصل‌اند و سر A از طناب نازک با نیروی F کشیده شده است. تپ مربعی شکل در لحظه $t = ۰$ به نقطه M می‌رسد، اگر تپ بازتابشی در لحظه $t = ۴s$ به نقطه A و تپ عبوری در لحظه $t = ۲۰s$ به نقطه B برسد، طول طناب نازک چند برابر طول طناب ضخیم است؟

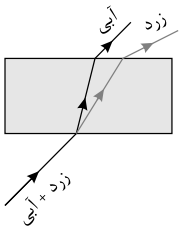


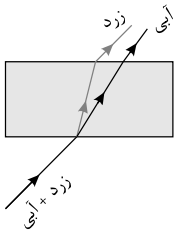
① $\frac{۳}{۵}$ ② ۲ ③ $\frac{۲}{۵}$ ④ ۳

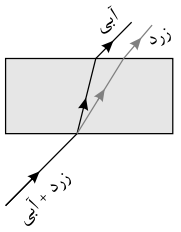
۷۲ - پرتو نور مرکبی شامل دو پرتوی زرد و آبی از هوا مطابق شکل به سطح یک تیغه شیشه‌ای می‌تابد. کدام شکل پرتوهای خروجی از تیغه با سطوح موازی را نشان می‌دهد؟



① 

② 

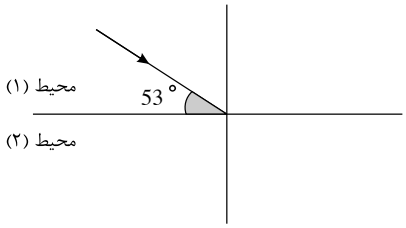
③ 

④ 

۷۳ - فوتونی با طول موج $۳۱۰nm$ به سطح فلزی می‌تابانیم. اگر فوتوالکترونی با تندی $۴ \times ۱۰^{۵} \frac{m}{s}$ از سطح فلز جدا شود، حداقل انرژی لازم برای جدا شدن الکترون از فلز چند ژول است؟ (جرم الکترون $۱۰^{-۳۰} kg$ و $hc = ۱۲۴۰\ eV \cdot nm$ و $e = ۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۹} C$)

① $۷٫۸ \times ۱۰^{-۱۹} J$ ② $۵٫۶ \times ۱۰^{-۱۹} J$ ③ $۱۱٫۲ \times ۱۰^{-۱۹} J$ ④ $۹٫۳ \times ۱۰^{-۱۹} J$

۷۴ - در شکل زیر تندی نور در محیط (۱)، ۲۵% کمتر از تندی نور در محیط (۲) است. زاویهٔ انحراف پرتو چند درجه است؟ ($\sin ۵۳ = ۰٫۸$)

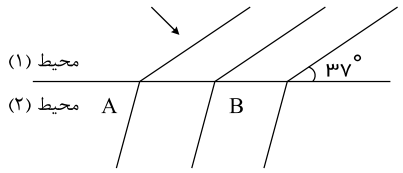


① ۳۰
② ۳۷
③ ۲۳
④ ۱۶

۷۵ - توان یک لامپ رشته‌ای $۸۰W$ و بازده آن ۱۵% است. این لامپ در هر دقیقه چه تعداد فوتون با متوسط طول موج $۴۹۶nm$ از خود گسیل می‌کند؟ ($hc = ۱۲۴۰eV \cdot nm$)

① ۳×۱۰^{۱۹} ② $۱٫۸ \times ۱۰^{۲۱}$ ③ $۱٫۶ \times ۱۰^{۱۸}$ ④ $۱٫۳ \times ۱۰^{۲۳}$

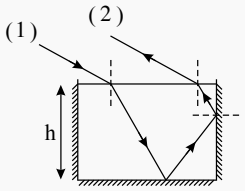
۷۶ - شکل زیر، جبهه‌های موج تختی را نشان می‌دهد که از مرز دو محیط عبور کرده اند. اگر طول موج در محیط‌های (۱) و (۲) به‌ترتیب به اندازه ۱۲ و ۶ سانتی‌متر کمتر از AB باشند، تندی موج در محیط (۲) چند برابر تندی موج در محیط (۱) است؟ ($\sin ۳۷ = ۰٫۶$)



① $\frac{۴}{۳}$ ② $\frac{۳}{۴}$ ③ $\frac{۶}{۵}$ ④ $\frac{۵}{۶}$

۷۷ - ظرفی داریم با سطوح داخلی آینه‌ای اگر داخل این ظرف را با مایعی به ضریب شکست $\sqrt{۲}$ پر نماییم و پرتوی نوری از هوا با زاویهٔ تابش ۴۵° به

داخل ظرف بتابد و بخشی از آن بازتاب شود و بخشی دیگر شکست یافته و وارد مایع شود، ارتفاع مایع (h) چقدر می‌تواند باشد؟ فاصلهٔ قائم پرتوهای (۱) و (۲) از یکدیگر برابر $\sqrt{6}$ سانتی‌متر است.



① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

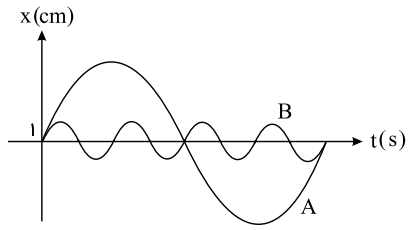
۷۸ - ظرف مکعب‌شکلی داریم که طول هر ضلع آن برابر یک متر است. این ظرف را تا ارتفاع $60cm$ از مایعی به ضریب شکست $\sqrt{3}$ پر می‌نماییم. اگر پرتوهای نور خورشید تحت زاویهٔ 30° نسبت به راستای افق به درون این ظرف بتابد،تقریباً چه مساحتی از کف ظرف روشن خواهد شد؟

۱) $10200cm^2$ ۲) $8980cm^2$ ۳) $10^4 cm^2$ ۴) صفر

۷۹ - نسبت بلندترین به کوتاه‌ترین طول موج در رشتهٔ پفوند ($n' = 5$) هیدروژن اتمی کدام گزینه است؟

۱) ۲۵ ۲) $\frac{900}{11}$ ۳) $\frac{864}{539}$ ۴) $\frac{36}{11}$

۸۰ - نمودار مکان ــ زمان مربوط به نوسانات دو منبع موج A و B مطابق شکل است. دامنهٔ نوسان منبع A چند سانتی‌متر باشد تا متوسط توان انتقال انرژی هر دو موج در یک محیط یکسان شود؟



۱) $\frac{5}{2}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸۱ - کدام روند در مورد انرژی شبکه بلور ترکیب‌های داده شده، درست است؟

۱) $Fe_2O_3 > FeO > FeCl_2$ ۲) $Fe_2O_3 > FeCl_2 > FeO$ ۳) $AlF_3 > Al_2O_3 > MgO$ ۴) $MgO > Na_2O > MgF_2$

۸۲ - کدام مولکول ناقطبی و پیوند (های) آن کووالانسی قطبی است؟

۱) HF ۲) F_2 ۳) H_2O ۴) CCl_4

۸۳ - نیروی جاذبه‌ی بین مولکولی در عنصرهای گروه ..... جدول تناوبی از نوع ..... است و در گروه ..... با افزایش جرم اتمی عنصرها، نقطه‌ی ذوب و جوش آن‌ها روند کاهشی دارد.

۱) ۱۸، نیروهای دوقطبی- دوقطبی ، ۱۵ ۲) ۱۸، وان‌درووالسی، ۱۵
۳) ۱۷، وان‌درووالسی، فلزهای قلیایی ۴) ۱۷، نیروهای دوقطبی- دوقطبی، فلزهای قلیایی

۸۴ - مولکول‌های ..... و ..... قطبی‌اند و در هر دو، جفت الکترون‌های پیوندی به اتم مرکزی نزدیک‌ترند.

۱) Cl_2O, NH_3 ۲) CO_2 , NO_2 ۳) $ClF_3 , COCl_2$ ۴) NF_3 , H_2O

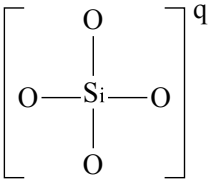
۸۵ - اختلاف انرژی شبکه‌ی بلور سدیم اکسید با انرژی شبکه‌ی بلور کدام ترکیب، بیش‌تر است؟

۱) منیزیم فلوئورید ۲) سدیم فلوئورید ۳) آلومینیم فلوئورید ۴) منیزیم اکسید

۸۶ - شعاع اتمی کدام عنصر زیر از شعاع یون پایدار آن در ترکیب‌های یونی مربوطه کوچکتر است؟

۱) استرانسیم ۲) آلومینیوم ۳) روبیدیم ۴) گوگرد

۸۷ - با توجه به ساختار یون زیر که همهٔ اتم‌ها در آن به آرایش هشتایی رسیده‌اند؛ کدام گزینه نادرست است؟



۱) نسبت شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن با یون سولفات برابر است.
۲) عدد اکسایش اتم مرکزی آن با اتم مرکزی در یون کربنات برابر است.
۳) قدر مطلق بار q با مجموع بار یون‌های فسفات و آمونیوم برابر است.
۴) این ساختار به صورت یون مجزا در جامدهای کووالانسی یافت نمی‌شود.

۸۸ - در کدام گزینه تمامی مواد جزء مواد مولکولی محسوب می شوند؟

۱) آب - آمونیاک - آمونیوم کلرید ۲) اتان - اتانول - اتانوئیک اسید
۳) گرافیت - گرافن - گلوکوز ۴) کربن دی‌اکسید - کربن تتراکلرید - سیلیسیم کربید

۸۹ - اگر سه تا از اتم‌های اطراف اتم مرکزی مولکول متان را توسط اتم‌های کلر جایگزین کنیم؛ کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد مولکول حاصل نادرست است؟ $(Cl = ۳۵/۵, C = ۱۲, H = ۱)$

۱) مولکول حاصل به دلیل افزایش جاذبهٔ بین مولکولی به حالت مایع در می‌آید.

۲) مولکول حاصل بر خلاف متان گشتاور دو قطبی صفر نداشته و قطبی است.

۳) درصد جرمی کربن در ترکیب حاصل کمتر از متان است.

۴) نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی مولکول تغییری نخواهد کرد.

۹۰ - در مورد واکنش تشکیل سدیم کلرید $(NaCl)$ از عناصر سازنده‌اش، کدام گزینه نادرست است؟

۱) در فرآوردهٔ حاصل یون‌های سازنده هم الکترون نیستند.

۲) مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها در واکنش انجام شده با یکدیگر برابر است.

۳) واکنش با تولید نور و گرمای زیادی همراه بوده و مقدار عددی ΔH آن منفی است.

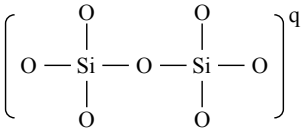
۴) واکنش انجام شده یک واکنش اکسایش - کاهش است.

۹۱ - از میان گونه‌های داده شده، چند مورد دارای ساختار خطی و اتم مرکزی آن دارای بار جزئی مثبت است؟

$$OCl_۲ - NO_۲^+ - C_۲H_۲ - CO_۲ - OCN^- - O_۳ - N_۲O - SO_۲$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۲ - نسبت بار الکتریکی آنیون اکسیژن‌دار داده شده از سیلیسیم چند برابر بار الکتریکی آنیون سیلیکات است؟ (با فرض آن که همهٔ اتم‌ها از آرایش هشتایی پیروی می کنند.)



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۹۳ - چند مورد از مطالب زیر نادرست است؟

آ) تنوع مواد مختلف عبارت است از: کووالانسی > یونی > مولکولی

ب) همه ترکیب هایی که در دما و فشار اتاق به حالت گازی شکل هستند، جزو مواد مولکولی اند.

پ) موادی که سخت و شکننده نیستند و در حالت جامد رسانایی برق ندارند، جامدهای کووالانسی هستند.

ت) پروپان و دی اتیل اتر دارای جرم مولی برابر هستند، ولی گشتاور دو قطبی دی اتیل اتر بزرگ تر از پروپان است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۴ - با توجه به شکل روبه رو کدام گزینه نادرست است؟

۱) پخته شدن نان سنگک بر روی دانه های سنگ نشانهٔ مقاوت گرمایی A است.

۲) A، فراوان ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین بوده که در دمای $۲۵^\circ C$ و فشار ۱ اتمسفر به حالت جامد وجود دارد.

۳) از نافلز سبک تر موجود در C تا به حال هیچ یون تک اتمی شناخته نشده است.

۴) ماسه همان نمونهٔ ناخالص B است.

۹۵ - آلیاژی حاوی فلزهای Cu، Sn و Zn است. اگر در یک نمونهٔ ۱/۸ گرمی از این آلیاژ، فلزهای Zn و Cu طی چند واکنش به ۱/۲ گرم مخلوط ZnO و $CuSO_۴$ تبدیل شوند که ۶۰ درصد جرمی این مخلوط را ZnO تشکیل می‌دهد، درصد جرمی Sn در این آلیاژ کدام است؟

$(Sn = ۱۱۹, Zn = ۶۵, Cu = ۶۴, S = ۳۲, O = ۱۶ : g \cdot mol^{-۱})$

۱) ۴۹/۸ ۲) ۵۳/۲ ۳) ۵۷/۲ ۴) ۶۷/۵

۹۶ - به $۲۰۰mL$ از محلول ۰٫۰۲۵ مولار نمک وانادیم (V)، $۳۲۵mg$ از فلز روی اضافه شده است. با توجه به جدول زیر، رنگ نهایی محلول، کدام است؟ ($Zn = ۶۵g \cdot mol^{-۱}$، واکنش در هر مرحله کامل انجام می‌شود. $(V^{۵+}(aq) + Zn(s) \rightarrow \cdots + Zn^{۲+}(aq)$)

عدد اکسایش وانادیم	(V)	(IV)	(III)	(II)
رنگ محلول	زرد	آبی	سبز	بنفش

① بنفش ② آبی ③ زرد ④ سبز

۹۷ - نمونه‌ای از یک نوع خاک رس دارای ۴۲٫۵ درصد جرمی سیلیس و ۱۵ درصد جرمی رطوبت (آب) است. اگر هنگام تهیهٔ گِل رس از آن، درصد جرمی رطوبت (آب) آن به ۵۰ درصد برسد، درصد جرمی سیلیس در گِل رس تهیه‌شده کدام است؟

① ۴۰ ② ۳۵ ③ ۳۰ ④ ۲۵

۹۸ - چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

• در واکنش فلز روی با محلول زرد رنگ نمک وانادیم(V)، روی به عنوان کاهنده و نمک وانادیم (V) به عنوان اکسنده عمل می‌کند.

• تعداد الکترون با عدد کوانتومی $l = ۱$ در کاتیون موجود در محلول سبزرنگ وانادیم، دو برابر تعداد الکترون با $l = ۰$ است.

• تعداد الکترون با عدد کوانتومی $l = ۱$ در کاتیون موجود در محلول بنفش‌رنگ نمک وانادیم، کم‌تر از تعداد الکترون‌ها با عدد کوانتومی $l = ۱$ در محلول سبز رنگ نمک وانادیم است.

• در تبدیل محلول بنفش‌رنگ وانادیم به محلول آبی‌رنگ، یون وانادیم در محلول بنفش رنگ به عنوان کاهنده عمل می‌کند.

① ۴ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۹۹ - چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد شکل روبه‌رو که مربوط به کلروفرم است، نادرست است؟• مایعی بی‌رنگ بوده که بخار آن سمی و اعتیادآور است که در گذشته به عنوان ماده بی‌هوش‌کننده استفاده می‌شد.

• مولکولی قطبی است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

• در نقشه پتانسیل آن در نقطه A هم بار جزیی منفی $(\delta-)$ و هم بار جزئی مثبت $(\delta+)$ خواهیم داشت که بار جزئی مثبت آن بزرگ‌تر است.

با نزدیک شدن یک میله باردار رفتار شکل روبه‌رو را از خود نشان خواهد داد.

• توزیع الکترون‌ها یکنواخت نبوده و تراکم بار الکتریکی روی اتم‌های سازنده آن یکسان نیست.

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۰۰ - چند مورد ازمطالب زیر دربارهٔ دو عنصر وانادیم $({}_{۲۳}V)$ و تیتانیم $({}_{۲۲}Ti)$، درست است؟

آ) هر دو عنصر در دورهٔ چهارم و تیتانیم در گروه چهارم جای دارد.

ب) در واکنش بین فلز روی و محلول نمک وانادیم، فلز روی نقش کاهنده را دارد.

پ) طول موج‌های بازتاب شده توسط محلول حاوی یون $V^{۳+}$، کوتاه‌تر از طول موج‌های بازتاب شده توسط محلول حاوی یون $V^{۲+}$ است.

ت) اکسید تیتانیم به‌عنوان رنگدانهٔ معدنی و رنگ سفید کاربرد دارد.

ث) به کار بردن تیتانیم در ساخت موتور جت، براساس ویژگی مقاومت عالی در برابر سایش و نقطهٔ ذوب بالای آن است.

① ۴ ② ۳ ③ ۲ ④ ۱

۱۰۱ - A یک عنصر از گروه ۱ جدول تناوبی و D عنصری با عدد اتمی ۱۲ است. دربارهٔ جامدهای یونی حاصل از واکنش هر یک از این دو عنصر با نافلز X، در مقایسه با جامد یونی LiF، چند مطلب زیر، درست است؟

• آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور D با X، بیشتر از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور LiF است.

• آنتالپی فروپاشی جامد بلوری AX، برابر یا کمتر از آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور LiF است.

• اگر اتم X در لایهٔ ظرفیت خود، ۶ الکترون داشته باشد، نقطهٔ ذوب بلور A با X از نقطهٔ ذوب بلور LiF پایین‌تر است.

• اگر به‌جای D در شبکهٔ بلور D با X، یون کلسیم جایگزین شود، آنتالپی فروپاشی آن به آنتالپی فروپاشی LiF نزدیک می‌شود.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۰۲ - چند مورد از جملات زیر نادرست است؟

آ) با ساختن ترکیبات یونی از آنیون‌های گروه ۱۷ و کاتیون‌های گروه ۱، بیشترین انرژی شبکهٔ بلور پایدار مربوط به LiF و کمترین مربوط به CsI است.

ب) انرژی فروپاشی شبکهٔ یونی $NaCl$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$2NaCl(s) + q \rightarrow 2Na^{+}(g) + Cl_2(g)$$

پ) عدد کوئوردینانسیون Cl^{-} در بلور شبکهٔ یونی $NaCl$ دو برابر الکترون‌های جابه‌جا شدهٔ تشکیل Al_2O_3 است.

ت) پایداری شبکهٔ یونی به دلیل غلبهٔ جاذبهٔ یون‌های غیرهمنام به دافعهٔ یون‌های هم‌نام است.

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۰۳ - در واکنش‌های مربوط به انرژی شبکهٔ بلور ترتیب درست مقادیر انرژی در کدام گزینه آمده است؟

$A) K^{+}(g) + I^{-}(g) \rightarrow KI(s)$

$B) Mg^{2+}(g) + O^{-2}(g) \rightarrow MgO(s)$

$C) Na^{2+}(g) + I^{-}(g) \rightarrow NaI(s)$

$D) Mg^{2+}(g) + 2I^{-}(g) \rightarrow MgI_2(s)$

① $B < D < C < A$ ② $A < C < D < B$ ③ $D < A < C < B$ ④ $D < A < B < C$

۱۰۴ - چه تعداد از مطالب زیر نادرست است؟

آ) فراوان‌ترین اکسید در پوستهٔ جامد زمین SiO_2 است.

ب) نمونه خالص سیلیس، کوارتز و نمونهٔ ناخالص آن، ماسه است.

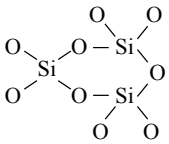
پ) پخته شدن نان سنگک بر روی دانه‌های سنگ، نشانهٔ مقاومت گرمایی سیلیس است.

ت) عنصرهای اصلی سازندهٔ جامدهای کووالانسی، در طبیعت یون تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهند.

ث) به دلیل آنتالپی پیوند بیشتر $Si - O$ در مقایسه با $Si - Si$، پایداری سیلیس از سیلیسیم بیشتر است.

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۰۵ - اگر ساختار لوویس یون روبه‌رو را با جفت نقطه‌ها کامل کنیم، پس از آن بار الکتریکی این یون کدام است؟



① +۶ ② −۶

③ −۳ ④ +۳

۱۰۶ - کدام گزینه در رابطه با مقایسهٔ شعاع‌های یونی نادرست است؟

آ) $P^{3-} > S^{2-} > Cl^{-}$

ب) $Al^{3+} > Mg^{2+} > Na^{+}$

پ) $Na^{+} > Al^{3+} > O^{2-}$

ت) $S^{2-} > Cl^{-} > Na^{+}$

① «آ»، «ب» ② «ب»، «پ» ③ «پ»، «ت» ④ «آ»، «ت»

۱۰۷ - اگر آنتالپی فروپاشی شبکهٔ سدیم اکسید برابر ۲۴۸۸ کیلوژول بر مول باشد، برای فروپاشی ۷٫۷۵ گرم از این ترکیب، چند کیلوژول انرژی لازم است و در این فرایند چند مول یون گازی تولید می‌شود؟ $(Na = 23, O = 16 : g \cdot mol^{-1})$

① ۳۱۱ – ۰٫۳۷۵ ② ۳۱۱ – ۰٫۴۲۵ ③ ۱۵٫۵ – ۰٫۴۲۵ ④ ۱۵٫۵ – ۰٫۳۷۵

۱۰۸ - با توجه به مولکول‌های زیر کدام گزینه نادرست است؟

PCl_3 , CO_2 , CSO , SiH_4 , $SOCl_2$, SO_3

① شمار مولکول‌های ناقطبی با شمار مولکول‌های قطبی برابر است.

② بار جزیی اتم کربن در CSO مثبت بوده و گشتاور دوقطبی PCl_3 مخالف صفر است.

③ مولکول‌های SO_3 و SiH_4 همانند $SOCl_2$ در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

④ شکل فضایی CSO شبیه کربن دی‌اکسید بوده و با PCl_3 متفاوت است.

۱۰۹ - کدام‌یک از گزینه‌های زیر دربارهٔ الماس و گرافیت صحیح است؟

① در جرم‌های برابر از الماس و گرافیت، الماس حجم بیشتری را اشغال می‌کند.

② الماس دارای ساختاری سه‌بعدی و لایه‌لایه می‌باشد و گرافیت ساختاری دوبعدی دارد.

③ آنتالپی پیوند «کربن-کربن» در الماس بیشتر از آنتالپی پیوند «کربن-کربن» در گرافیت است.

④ الماس و گرافیت هر دو دگرشکل‌های کربن می‌باشند.

۱۱۰ - مخلوطی از کلسیم کربنات و پتاسیم نیترات به جرم ۱۲۹٫۲۸ گرم را تا تجزیهٔ کامل هر دو ترکیب، حرارت داده‌ایم. هرگاه حجم گاز اکسیژن تولید شده در شرایط استاندارد با حجم گاز اکسیژن تولید شده بر اثر مبادلهٔ ۱٫۶ مول الکترون در برقکافت آب یکسان باشد، درصد جرمی کلسیم کربنات در مخلوط اولیه کدام است؟

$(C = 12, N = 14, O = 16, K = 39, Ca = 40 : g \cdot mol^{-1})$

$KNO_3(s) \rightarrow K_2O(s) + N_2(g) + O_2(g)$ (معادله موازنه شود)

$CaCO_3(s) \rightarrow CaO(s) + CO_2(g)$

① ۲۵ ② ۴۲ ③ ۶۵ ④ ۷۵

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۳

$$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow\frac{۲+h+\frac{۱}{۲+h}-۲-\frac{۱}{۲}}{h}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow ۸h=۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲}$$

$$h=\frac{۹}{۲}-\frac{۹}{۲+h}\Rightarrow h=\frac{۱۸+۹h-۱۸}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۱=\frac{۹}{۲(۲+h)}\Rightarrow ۴+۲h=۹\Rightarrow h=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۲ ـ گزینه ۳ ابتدا شرط لازم برای مشتق پذیری (پیوستگی) را بررسی می کنیم.

$f(۰)=۰+۱=۱\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=۱\ ,\ \lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=۱$ در $x=۰$ پیوسته است

$f(۱)=۴\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=۴\ ,\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۲$ در $x=۱$ ناپیوسته است

$f(۲)=۶\ ,\ \lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=۶\ ,\ \lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)=۶$ در $x=۲$ پیوسته است

پس تابع f در نقطه $x_۰=۱$ ناپیوسته است. حال باید مشتق پذیری تابع را در نقاط مرزی $x=۰\ ,\ x=۲$ بررسی کنیم.

$$f'(x)=\begin{cases}۰ & x<۰\\ ۱ & ۰<x<۱\\ ۲ & ۱<x<۲\\ ۲x & x>۲\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}f'_+(۰)=۱\ ,\ f'_-(۰)=۰\\ f'_-(۲)=۲\ ,\ f'_+(۰)=۴\end{matrix}$$

f در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ و $x=۲$ مشتق پذیر نمی باشد.

۳ ـ گزینه ۲ هریک را بررسی می‌کنیم:

$$y'_۱(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x[-x^۲]-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}[-x^۲]=[۰^-]=-۱$$ مشتق‌پذیر

$$y'_۲(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲[x]-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}x[x]=۰\times(۰\ \text{یا}\ -۱)=۰$$ مشتق‌پذیر

$$y'_۳(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{x[-x]-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}[-x]=[۰^+\ \text{یا}\ ۰^-]=۰\ \text{یا}\ -۱$$ نقطهٔ گوشه‌ای

۴ ـ گزینه ۳

طبق گفته ی سؤال مقدار $f'(۱)$ موجود است، بنابراین باید شرط پیوستگی تابع در $x=۱$ و نیز برابری مشتق های چپ و راست در $x=۱$ برقرار باشد:

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱\Rightarrow f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=۱-۱=۰\\ x^۲+ax+b & x<۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=۱+a+b\end{cases}\Rightarrow a+b+۱=۰$$

$$f'(x)=\begin{cases}۱+\frac{۱}{x^۲} & x\geq ۱\Rightarrow f'_+(۱)=۱+۱=۲\\ ۲x+a & x<۱\Rightarrow f'_-(۱)=۲+a\end{cases}\Rightarrow ۲+a=۲\Rightarrow a=۰,b=-۱$$

$$f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & x\geq ۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}\Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۱=۲-۲\sqrt{۲}$$

۵ ـ گزینه ۱ تابع f روی

$\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در $x = ۱$ هم مشتق‌پذیر و در نتیجه پیوسته است. شرط پیوستگی به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{a\sqrt{x} - b}{x} = a - b$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (bx^۳ + ax + ۲) = b + a + ۲$$

$$a - b = b + a + ۲ \to ۲b = -۲ \to b = -۱$$

شرط مشتق‌پذیری به صورت زیر است:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{ax}{۲\sqrt{x}} - a\sqrt{x} + b}{x^۲} & x > ۱ \\ ۳bx^۲ + a & x < ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۱) = \dfrac{\frac{a}{۲} - a + b}{۱} = b - \dfrac{a}{۲} \\ f'_-(۱) = ۳ab + a \end{cases} \to b - \frac{a}{۲} = ۳b + a \to a = -\frac{۴b}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

در نتیجه: $a + b = \frac{۱}{۳}$.

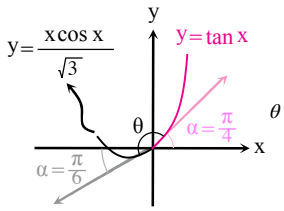
۶ - گزینه ۱ تابع در $x = ۰$ پیوسته است و داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + \tan^۲ x & x > ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۳}}(\cos x - x\sin x) & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_۱ = f'_+(۰) = ۱ \\ m_۲ = f'_-(۰) = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

اگر α و β زاویهٔ بین امتداد نیم‌مماس‌های راست و چپ با جهت مثبت محور xها باشد، داریم:

$$m_۱ = \tan\alpha = ۱ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴}$$
$$m_۲ = \tan\beta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{۶}$$

پس زاویهٔ بین امتداد نیم‌مماس‌ها $\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶} = \frac{\pi}{۱۲}$ است؛ اما دقت کنید که در یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ تابع در $x = ۰$ مقدار تابع به‌ترتیب مثبت و منفی است؛ یعنی نمودار تابع از ناحیهٔ اول و سوم می‌گذرد؛ پس زاویهٔ بین نیم‌مماس‌های راست و چپ با جهت مثبت محور xها به‌ترتیب برابر $\frac{\pi}{۴}$ و $\pi + \frac{\pi}{۶}$ است و لذا زاویهٔ بین دو نیم‌مماس برابر است با:



$$\theta = \frac{۷\pi}{۶} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

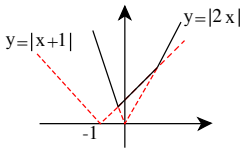
۷ - گزینه ۱ ابتدا $f(x)$ را تعیین علامت کرده و سپس مشتق گیری می کنیم. لذا داریم:

$$f(x) = |x - ۲|x^{\frac{۲}{۳}} = \begin{cases} (x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} = x^{\frac{۵}{۳}} - ۲x^{\frac{۲}{۳}} & x \geq ۲ \\ -(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} = -x^{\frac{۵}{۳}} + ۲x^{\frac{۲}{۳}} & x < ۲ \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & x > ۲ \\ -\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & x < ۲ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} - \frac{۴}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰ \Rightarrow ۵\sqrt[۳]{x^۲} - \frac{۴}{\sqrt[۳]{x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۵x - ۴}{\sqrt[۳]{x}} = ۰ \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} \begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵} \\ x = ۰ \quad f' \text{ موجود نیست} \end{cases}$$

از طرفی در $x = ۲$ نیز مشتق ناپذیر می باشد ($f'_-(۲) \neq f'_+(۲)$)، لذا تابع $f(x)$ در مجموع ۳ نقطه بحرانی دارد.

۸ - گزینه ۲ ابتدا نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می کنیم و سپس آن قسمت که پایین تر است حذف شده و قسمتی که بالاتر است می ماند همانطور که می بینیم کم ترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت منفی است.



$$\xrightarrow{-۱<x<۰} \quad -۲x = x + ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(-\frac{۱}{۳}) = \frac{۲}{۳}$$

۹ - گزینه ۲ برای تعیین تعداد نقاط بحرانی تابع f باید ابتدا ضابطهٔ f را با تعیین علامت قدرمطلق، به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تبدیل کنیم، سپس از آن مشتق بگیریم:

$$f(x) = |x - ۲|(x^۲ + ۱) = \begin{cases} (x - ۲)(x^۲ + ۱) & x \geq ۲ \\ -(x - ۲)(x^۲ + ۱) & x < ۲ \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۲x^۲ + x - ۲ & x \geq ۲ \\ -x^۳ + ۲x^۲ - x + ۲ & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۴x + ۱ & x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۴x - ۱ & x < ۲ \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = \frac{۱}{۳} \text{ غ ق ق}$$

$$-۳x^۲ + ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = \frac{۱}{۳} \text{ قابل قبول}$$

بنابراین با احتساب این‌که تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است (زیرا مشتق چپ و راست آن در نقطه $x = ۲$ نابرابرند) مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع f به صورت $\{۱, \frac{۱}{۳}, ۲\}$ خواهد بود؛ یعنی $a = ۳$ است.

از طرفی برای تعیین تعداد نقاط بحرانی تابع g داریم:

$$g(x) = \frac{۲x - ۱}{x + ۴} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x + ۴) - (۲x - ۱)}{(x + ۴)^۲} = \frac{۹}{(x + ۴)^۲}$$

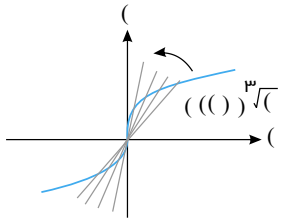
مشتق تابع g در نقطهٔ $x = -۴$ موجود نیست اما چون این نقطه در دامنهٔ تابع g قرار ندارد، پس نقطهٔ بحرانی تابع g محسوب نمی‌شود و از آن‌جا که مشتق، امکان صفر شدن نیز ندارد، پس تابع g فاقد نقطهٔ بحرانی است، یعنی $b = ۰$ است. بنابراین $a + b = ۳$ است.

۱۰ - گزینه ۳ نکته: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطهٔ $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است که در این حالت $f'(a)$ وجود ندارد.

حال با توجه به گزینه‌های سؤال، توابع $f(x) = [x]$ و $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ x + ۱ & x < ۰ \end{cases}$ و $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته نیستند. به همین دلیل نمی‌توانند

در $x = ۰$ دارای «مماس قائم» باشند، ولی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است و داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f'(۰) = +\infty$$



از نظر نموداری نیز مشخص می‌شود که وقتی از سمت راست یا از سمت چپ به نقطهٔ $x = ۰$ نزدیک می‌شویم، خطوط مماس به خط $x = ۰$ نزدیک می‌شوند (به عبارت دیگر شیب خطوط مماس دائماً به $+\infty$ نزدیک می‌شوند، زیرا زاویهٔ خطوط مماس دائماً به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک می‌شوند.)

۱۱ - گزینه ۴ تابع f تابعی پیوسته است.

$$f(x) = ۲ - \sqrt[۳]{(x-۳)^۲} \ , \ D_f = [-۵, ۴]$$

$$f'(x) = ۰ - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x-۳}} = \frac{-۲}{۳\sqrt[۳]{x-۳}} \ , \ f'(x) = ۰ \Rightarrow$$ ریشه ندارد.

$f'(x) =$ وجود ندارد $\Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow$ نقطه بحرانی

$$x = -۵ \Rightarrow f(-۵) = ۲ - \sqrt[۳]{۶۴} = ۲ - ۴ = -۲$$

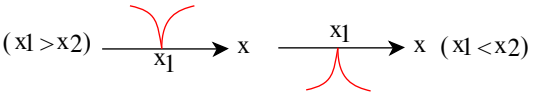
$$x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۲ - ۰ = ۲$$

$$x = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۲ - \sqrt[۳]{۱} = ۱$$

مطلق $\min = -۲$ و مطلق $\max = ۲$

۱۲ - گزینه ۳ می دانیم: ریشه ی مضاعف رادیکال فرجه ی فرد طول نقطه بازگشتی منحنی است.

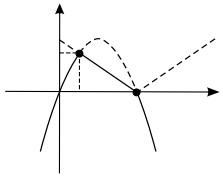
از آنجا که $x_۲$ ریشه ی ساده و $x_۱$ ریشه ی مضاعف تابع $P(x)$ است، لذا $f(x) = \sqrt[۳]{(x-x_۱)^۲(x-x_۲)}$ خواهد بود. در اطراف نقطه $x = x_۱$ تابع به صورت نقطه بازگشت به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:



۱۳ - گزینه ۲ تابع f را رسم می کنیم . پیداست که ماکزیمم تابع f (نمودار پر رنگ) در محل تلاقی نمودار های $۴ - x$ و $۴x - x^۲$ قرار دارد

$$۴ - x = ۴x - x^۲ = x(۴ - x) \xrightarrow{x \neq ۴} x = ۱ \ , \ x = ۴$$

مطلق $\max = f(۱) = ۳$



۱۴ - گزینه ۱ برد تابع f که $(-۱, ۰]$ است را به عنوان محدوده ی تغییرات g در نظر می گیریم:

$g(x) = x^۲ + x, \ x \in (-۱, ۰]$ و $g'(x) = ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$ بحرانی

$$\Longrightarrow \begin{cases} g(-۱) = ۰ \\ g(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۴} \\ g(۰) = ۰ \end{cases} \Longrightarrow R_{gof} = [-\frac{۱}{۴}, ۰]$$

۱۵ - گزینه ۱ کافی است مشتق چپ و راست تابع را در نقطه $x = ۰$ به دست آوریم تا شیب دو خط مماس بر تابع حاصل شود. لذا داریم:

$$f(x)=\sqrt[3]{1+|x|}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1+x} & x\geq 0\\ \sqrt[3]{1-x} & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & x\geq 0\Rightarrow f'_+(0)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}} & x<0\Rightarrow f'_-(0)=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{1^2}}=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{زاویه بین دو نیم مماس}=\tan\theta=\left(\left|\frac{\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})}{1+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})}\right|\right)=\left(\left|\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\right|\right)=\frac{3}{4}$$

۱۶ - گزینه ۳ اولاً تابع باید در این نقطه پیوسته باشد:

$$f(1^-)=f(1^+)\Rightarrow a(1)^2+b[3(1^-)]=1+\frac{c}{(1)^2}\Rightarrow a+2b=c+1$$

حال باید مشتق های چپ و راست تابع در این نقطه نیز برابر باشند:

توجه کنید که مشتق توابع براکتی صفر است. در نتیجه مشتق $[2x]$ برابر صفر خواهد بود، لذا داریم:

$$f'_-(1)=f'_+(1)=f'(1)\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{2c}{(1)^3}=2\Rightarrow c=-1\\ 2a(1)=2\Rightarrow a=1\end{cases}$$

$$a+2b=c+1\Rightarrow b=\frac{-1+1-1}{2}=-\frac{1}{2}\qquad abc=\frac{1}{2}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}(f^2(x)+2f(x)+4)=mf'(1)f'(1)\times 12=mf'(1)\Rightarrow m=12$$

۱۸ - گزینه ۱ بازهٔ داده شده بسته نیست و (احتمالاً) تابع نیز پیوسته است، پس بهتر است به کمک رسم، وضعیت اکسترمم‌های مطلق تابع را بررسی کنیم. دقت کنید که:

$$2<x\leq 4\Rightarrow \pi<\frac{\pi}{2}x\leq 2\pi\Rightarrow -1<\cos\frac{\pi}{2}x\leq 1$$

بنابراین باید بازهٔ $(2,4]$ را به‌گونه‌ای افراز کنیم که $[\cos\frac{\pi}{2}x]$ در هر کدام تنها یک عدد صحیح باشد:

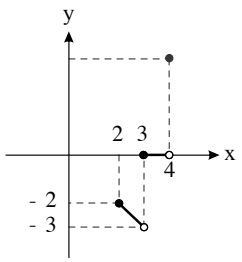
$$2<x<3\Rightarrow \pi<\frac{\pi}{2}x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -1<\cos\frac{\pi}{2}x<0$$

$$\Rightarrow [\cos\frac{\pi}{2}x]=-1\Rightarrow f(x)=x(-1)=-x$$

$$3\leq x<4\Rightarrow \frac{3\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}x<2\pi\Rightarrow 0\leq\cos\frac{\pi}{2}x<1$$

$$\Rightarrow [\cos\frac{\pi}{2}x]=0\Rightarrow f(x)=x(0)=0$$

ضمناً $f(4)=4\times 1=4$، پس نمودار تابع مطابق مقابل است:

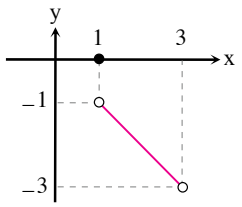


ماکزیمم مطلق تابع برابر ۴ است؛ اما تابع مینیمم مطلق ندارد.

۱۹ - گزینه ۳

$$1<x<3\Rightarrow\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow -1\leq\cos\frac{\pi}{2}x<0\Rightarrow f(x)=x\times(-1)=-x$$

و $f(1) = 1 \times 0 = 0$، پس نمودار تابع در بازهٔ $(1\ ,\ 3)$ مطابق شکل مقابل است:



ملاحظه می‌شود که اگر $a \leq -3$، آنگاه $f_{\max} = 0$ و $f_{\min} = a$؛ در غیر این‌صورت تابع مینیمم نخواهد داشت.

۲۰ - گزینه ۳ در گزینهٔ «۱» داریم:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

به‌طور مشابه در گزینه‌های ۲ و ۴ هم مشتق برابر صفر است؛ اما در گزینهٔ «۳» داریم:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{[x]\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{0}{x} = 0 \\ f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

۲۱ - گزینه ۳ نقطه $M\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha + 1\end{matrix}\right.$ روی خط اختیار کرده چون $MA + MB = 2$ پس:

$$\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2} = 2$$

$$\sqrt{2}|\alpha| + \sqrt{2}|\alpha - 1| = 2$$

در نتیجه:

پس داریم $|\alpha| + |\alpha - 1| = \sqrt{2}$ این معادله همواره ۲ جواب دارد پس در دو نقطه قطع می‌کند.

۲۲ - گزینه ۱ ابتدا کانون سهمی را بدست می آوریم سپس بوسیله فرمول فاصله ی نقطه از خط، فاصله نقطه ی F تا خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) را بدست می آوریم:

$$f'_y = 0 \Rightarrow 2y - 4 = 0 \to y = 2 = \beta \Rightarrow (y - 2)^2 \overset{y=0}{=\!=\!=} 8x + 12 + 4$$

$$\to (y - 2)^2 = 8x + 16 \to (y - 2)^2 = \underset{\text{سهمی افقی مثبت}}{8(x + 2)}$$

$$S\left|\begin{matrix}-2 : \alpha \\ 2 : \beta\end{matrix}\right. \quad , \quad 4a = 8 \to a = 2$$

$$\text{مختصات کانون} : F\left|\begin{matrix}\alpha + a \\ \beta\end{matrix}\right. \to F\left|\begin{matrix}0 \\ 2\end{matrix}\right.$$

حال فاصله $F\left|\begin{matrix}0 \\ 2\end{matrix}\right.$ را از خط $x - y = 0$ بدست می‌آوریم:

$$FH = \frac{|0 - 2 + 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

۲۳ - گزینه ۴ به موازات محور تقارن هیچ مماسی نمی توان بر سهمی رسم کرد.

$f'_y = 0 \Rightarrow 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ محور تقارن

پس از روی خط $y = 2$ که موازی محور تقارن است نمی توان هیچ مماسی بر سهمی رسم کرد.

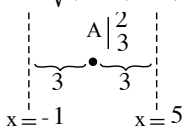
۲۴ - گزینه ۱ ابتدا معادله ی سهمی را استاندارد می کنیم: $x^2 - y - 4x + m = 0$

$$P = -\frac{\text{ضریب عامل درجه اول}}{\times 4\ (\text{ضریب عامل درجه دوم})} = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{طول وتر کانونی} = 4|p| = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

به مقدار m بستگی ندارد.

۲۵ ـ گزینه ۴

$$AF = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۰)^۲} = \sqrt{۰+۹} = ۳$$



چون هر نقطه از کانون و خط هادی به یک فاصله است. پس فاصله نقطه A از خط هادی نیز باید ۳ باشد (معادله خط هادی در سهمی افقی $x = k$ است.)

۲۶ ـ گزینه ۲

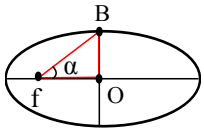
$$(x-۱)^۲ \overset{x=۰}{=\!=\!=} ۴y - ۲k + ۱ + ۱$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴y - ۲k + ۲ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴(y - \frac{k}{۲} + \frac{۱}{۲})$$ سهمی قائم مثبت

$$S\left|\begin{matrix} ۱ & : \alpha \\ \frac{k}{۲} - \frac{۱}{۲} & : \beta \end{matrix}\right. , \ ۴p = ۴ \Rightarrow p = ۱$$

مختصات کانون : $F\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta + p \end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix} ۱ \\ \frac{k}{۲} - \frac{۱}{۲} + ۱ \end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{k}{۲} - \frac{۱}{۲} + ۱ = ۵ \Rightarrow \frac{k}{۲} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow k = ۹$

۲۷ ـ گزینه ۴

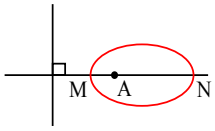


$$\tan ۶۰ = \frac{b}{c} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + \frac{b^۲}{۳} \Rightarrow a^۲ = \frac{۴b^۲}{۳} \Rightarrow a = \frac{۲b}{\sqrt{۳}}$$

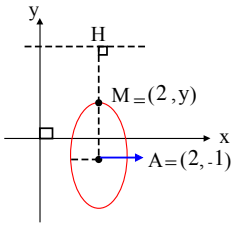
$$\frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲b^۲}{\frac{۲b}{\sqrt{۳}}} = \frac{\sqrt{۳} \times ۲b^۲}{۲b} = \sqrt{۳}b$$

۲۸ ـ گزینه ۳ نکته: اگر خط Δ و نقطه A خارج از آن داده شده باشد، مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله آنها از نقطه A با فاصله‌شان از خط Δ برابر مقدار $m < ۱$ باشد، یک «بیضی» است.



مطابق شکل در این بیضی با رسم محور کانونی بیضی، دو نقطه **M** و **N** (که همان رئوس کانونی بیضی هستند) به دست می‌آیند که به ترتیب نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی به خط Δ هستند.

باتوجه به نکته فوق، کافی است که مختصات نقطه M را به دست آوریم. باتوجه به شکل رسم شده داریم:



$$\frac{MA}{MH} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{|y-(-۱)|}{|y-۴|} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{-۱<y<۴} \frac{y+۱}{۴-y} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳y + ۳ = ۸ - ۲y \Rightarrow ۵y = ۵ \Rightarrow y = ۱$$

پس کوتاهترین فاصله نقطه M از خط $y = ۴$ برابر $۴ - ۱ = ۳$ است.

۲۹ ـ گزینه ۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{MFF'}$ رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$\overset{\Delta}{MFF'}\ : MF^{۲} = MF'^{۲} + FF'^{۲} \to ۸^{۲} + ۱۵^{۲} = ۶۴ + ۲۲۵ = ۲۸۹ \to MF = ۱۷$

$MF + MF' = ۲a \to ۸ + ۱۷ = ۲a \to ۲a = ۲۵$ قطر بزرگ $\to a = \frac{۲۵}{۲}$

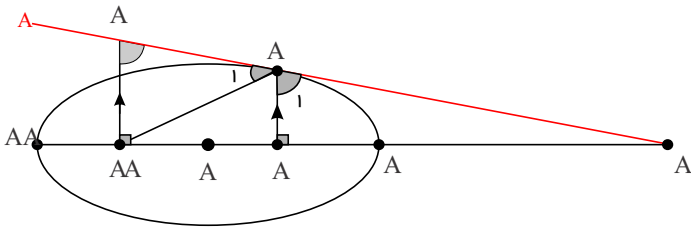
فاصلهٔ کانونی $FF' = ۱۵ \to ۲c = ۱۵ \to c = \frac{۱۵}{۲}$

$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \to (\frac{۲۵}{۲})^{۲} = b^{۲} + (\frac{۱۵}{۲})^{۲} \to b^{۲} = \frac{۶۲۵}{۴} - \frac{۲۲۵}{۴} = \frac{۴۰۰}{۴} = ۱۰۰$

$\to b = ۱۰ \to$ قطر کوچک $۲b = ۲۰$

$\frac{\text{قطر بزرگ}}{\text{قطر کوچک}} = \frac{۲a}{۲b} = \frac{۲۵}{۲۰} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$

۳۰ ـ گزینه ۲



$۲a = ۱۸ \to a = ۹$

$۲c = ۶ \to c = ۳$

$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \to ۹^{۲} = b^{۲} + ۳^{۲} \to b = \sqrt{۸۱ - ۹} = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$

اندازهٔ MF را که برابر نصف وتر کانونی است محاسبه می‌کنیم:

$MF = \frac{b^{۲}}{a} = \frac{(۶\sqrt{۲})^{۲}}{۹} = ۸$

$MF + MF' = ۲a = ۱۸ \to ۸ + MF' = ۱۸ \to MF' = ۱۰$

از M به F' وصل می‌کنیم و از کانون F' موازی MF رسم می‌کنیم تا d را در N قطع کند. داریم:

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} F'N \parallel FM \\ d \text{ مورب} \end{array}\right\} \to \hat{N} = \hat{M}_{۱} \\ \hat{M}_{۱} = \hat{M}_{۲} \end{array}\right\} \to \hat{N} = \hat{M}_{۲} \to NF' = MF' = ۱۰$

$\overset{\Delta}{NEF'}\ : FM \parallel F'N \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{EF}{\underbrace{EF'}_{EF+FF'}} = \frac{MF}{NF'} \to \frac{EF}{EF + ۶} = \frac{۸}{۱۰}$

$\to ۱۰EF = ۸EF + ۴۸ \to ۲EF = ۴۸ \to EF = ۲۴$

$FA = OA - OF = \frac{AA'}{۲} - \frac{FF'}{۲} = ۹ - ۳ = ۶$

فاصلهٔ E تا نزدیک ترین نقطهٔ بیضی (A) را محاسبه می‌کنیم:

$EA = EF - FA = ۲۴ - ۶ = ۱۸$

۳۱ ـ گزینه ۱

$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{C} = ۴۵^{\circ} \to BF = FC \\ BF = a \end{array}\right\} \to BF = FC = a$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\Delta}{BFC}\ :\ a^۲+a^۲=BC^۲ \to BC=a\sqrt{۲} \\ OD=BC \end{array}\right\} \to BC=OD=a\sqrt{۲}$$

$$AD=OD-OA=a\sqrt{۲}-a=a(\sqrt{۲}-۱)$$

$$C\hat{F}D=F\hat{C}D=۴۵^\circ \to DF=DC$$

$$\overset{\Delta}{FDC}\ :\ DF^۲+DF^۲=a^۲ \to DF^۲=\frac{a^۲}{۲} \to DF=\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

$$AF=FD-AD=\frac{\sqrt{۲}}{۲}a-(a\sqrt{۲}-a)=a(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲}+۱)=a(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\frac{AD}{AF}=\frac{\cancel{a}(\sqrt{۲}-۱)}{\cancel{a}(۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲})}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲}$$

۳۲ ـ گزینه ۴ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ را از خط $x=۳$ را MH و فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(-۱,۰)$ را MA در نظر می‌گیریم. داریم:

$$MH=MA+۲ \to \frac{|x-۳|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=\sqrt{(x-(-۱))^۲+(y-۰)^۲}+۲$$

اگر $x>۳$ باشد؛ داریم:

$$x-۳=\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲}+۲ \to (x-۵)^۲=(x+۱)^۲+y^۲$$

$$\to \cancel{x^۲}-۱۰x+۲۵=\cancel{x^۲}+۲x+۱+y^۲ \to y^۲=-۱۲x+۲۴ \to y^۲=-۱۲(x-۲)$$

اگر $x<۳$ باشد؛ داریم:

$$-x+۳=\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲}+۲ \to (۱-x)^۲=(x+۱)^۲+y^۲$$

$$\to \cancel{۱}-۲x+\cancel{x^۲}=\cancel{x^۲}+۲x+\cancel{۱}+y^۲ \to y^۲=-۴x$$

۳۳ ـ گزینه ۳

$$y^۲=\frac{۲m}{۳}y+۳x+۱ \xrightarrow[\text{تساوی قرار می‌دهیم.}]{\text{جمله‌های شامل } y \text{ را در یک طرف}} y^۲-\frac{۲m}{۳}y=۳x+۱$$

$$\xrightarrow{+(\frac{m}{۳})^۲} y^۲-\frac{۲m}{۳}y+\frac{m^۲}{۹}=۳x+\frac{m^۲}{۹}+۱$$

$$\xrightarrow[\text{و در سمت راست تساوی از ۳ فاکتور می‌گیریم.}]{\text{سمت چپ تساوی را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم}} (y-\frac{m}{۳})^۲=۳(x+\frac{m^۲}{۲۷}+\frac{۱}{۳}) \to$$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{مختصات رأس } S(-\frac{m^۲}{۲۷}-\frac{۱}{۳},\frac{m}{۳}) \\ ۴a=۳ \to a=\frac{۳}{۴} \end{array}\right\} \to \text{معادلهٔ خط هادی}\ :\ x=-\frac{m^۲}{۲۷}-\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۴} \\ \text{فرض}\ :\ x=-\frac{۱۷}{۱۲} \end{array}\right\}$$

$$\to \frac{m^۲}{۲۷}+\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۴}=\frac{۱۷}{۱۲} \to \frac{m^۲}{۲۷}=\frac{۱۷}{۱۲}-\frac{۱}{۳}-\frac{۳}{۴}=\frac{۱۷-۴-۹}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

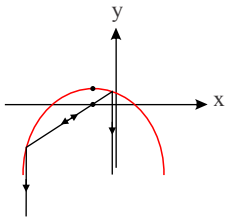
$$\to m^۲=۹ \to m=\pm ۳$$

۳۴ ـ گزینه ۱

$$x^۲+۱۰x=۷۵-۲۰y \xrightarrow{+۵^۲} x^۲+۱۰x+۲۵=-۲۰y+۱۰۰$$

$\rightarrow (x+5)^2 = -20(y-5)$

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است.



$$\left.\begin{array}{l} S(-5,5) \text{ مختصات رأس} \\ 4a = 20 \rightarrow a = 5 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ مختصات کانون $F(-5, 5-5) = (-5, 0)$

اشعهٔ نور از کانون می‌گذرد و با محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد بنابراین شیب آن برابر یک است و معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$y - 0 = 1\ \big((x-(-5))\big) \rightarrow y = x + 5$

با حل دستگاه نقاط برخورد اشعه نور و سهمی را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} (x+5)^2 = -20(y-5) \\ y = x+5 \end{array}\right\} \rightarrow (x+5)^2 = -20(x + \cancel{5} - \cancel{5})$$

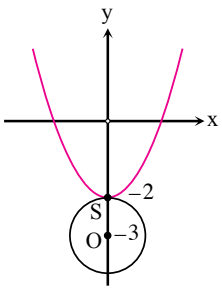
$\rightarrow x^2 + 10x + 25 = -20x$

$\rightarrow x^2 + 30x + 25 = 0 \rightarrow (x+15)^2 - 225 + 25 = 0 \rightarrow (x+15)^2 = 200$

$\rightarrow x + 15 = \pm 10\sqrt{2} \rightarrow x = -15 \pm 10\sqrt{2}$

۳۵ ـ گزینه ۴

هر دو مقطع سهمی و دایره را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. دایرهٔ $x^2 + (y+3)^2 = 1$ به مرکز $O(0,-3)$ و شعاع ۱ است. و سهمی $x^2 = y + 2$ سهمی قائم است و دهانهٔ آن رو به بالا است و $S(0,-2)$ رأس آن است و $4a = 1$ پس $a = \frac{1}{4}$. نمودار هر دومقطع در شکل مقابل رسم شده است. همانطور که دیده می‌شود این دو مقطع مخروطی در رأس سهمی بر یک‌دیگر مماس هستند.



۳۶ ـ گزینه ۲

$3(x^2 + 2x) = -my - 11 \rightarrow 3(x^2 + 2x + 1 - 1) = -my - 11 \rightarrow 3[(x+1)^2 - 1] = -my - 11 \rightarrow 3(x+1)^2 - 3 = -my - 11 \rightarrow 3(x+1)^2 = -my - 8$

$\rightarrow (x+1)^2 = -\frac{m}{3}y - \frac{8}{3} \rightarrow (x+1)^2 = -\frac{m}{3}(y + \frac{8}{m})$

فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی $= a = \frac{2}{3}$, $4a = \frac{m}{3} \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} \frac{8}{3} = \frac{m}{3} \rightarrow m = 8$

سهمی قائم است بنابراین معادله خط مماس در رأس سهمی به صورت $y = k$ می‌باشد پس $a = 0$ است. معادله استاندارد سهمی $(x+1)^2 = -\frac{8}{3}(y+1)$ و مختصات رأس سهمی $S(-1,-1)$ است که باید در معادله خط صدق کند. بنابراین داریم:

$y = b \xrightarrow{S(-1,-1)} y = -1 \rightarrow \boxed{b = -1}$

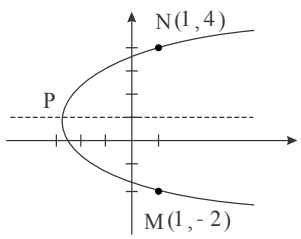
در نتیجه:

$a - b = 0 - (-1) = 1$

۳۷ ـ گزینه ۱

سهمی افقی و دهانه آن رو به راست است و معادله محور تقارن آن به صورت $y = k$ می‌باشد. نقاط M و N مولفه یکسان دارند پس قرینه هم نسبت به محور تقارن سهمی‌اند و داریم:

$$k = \frac{y_N + y_M}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$



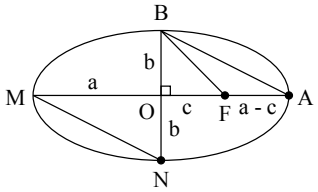
از طرف دیگر داریم:

$y_P = k = 1 \rightarrow$ نقطه P راس سهمی است.

معادله استاندارد سهمی : $(y-1)^2 = 4a(x+3) \xrightarrow[\text{جایگذاری می‌کنیم.}]{\text{مختصات } N(1,4) \text{ را در معادله}} (4-1)^2 = 4a(1+3) \to 9 = 16a \to a = \frac{9}{16}$

فاصله بین کانون و خط هادی $= 2a = 2 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{8}$

۳۸ ـ گزینه ۳



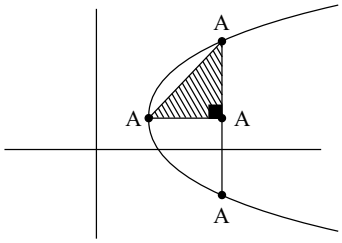
$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6} \to c = 5x \ , \ a = 6x$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABF}}}{S_{\overset{\triangle}{BOF}} + S_{\overset{\triangle}{MON}}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} OB \cdot AF}{\cancel{\frac{1}{2}} OB \cdot OF + \cancel{\frac{1}{2}} ON \cdot OM}$$

$$= \frac{\cancel{b} \cdot (a-c)}{\cancel{b} \cdot c + \cancel{b} \cdot a} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{6x-5x}{6x+5x} = \frac{1}{11}$$

۳۹ ـ گزینه ۲

$y^2 - 2y - 4x + 5 = 0 \to (y^2 - 2y + 1) - 4x + 5 - 1 = 0 \to (y-1)^2 = 4(x-1)$



$\to$ مختصات کانون $S = (1,1)$

$4a = 4 \to a = 1$

$\to$ مختصات کانون $F = (2,1)$

اگر خط عمود بر محور تقارن سهمی در کانون آن، سهمی را در نقاط B و A قطع نماید، آنگاه هر یک از نقاط A و B به فاصلهٔ $2a$ از کانون قرار دارند.

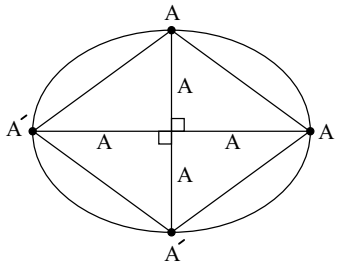
یعنی $AF = BF = 2a$

$\overset{\triangle}{ASF} \ : AS^2 = AF^2 + SF^2 = (2a)^2 + a^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2 \to AS = a\sqrt{5} \xrightarrow{a=1} AS = \sqrt{5}$

۴۰ ـ گزینه ۱

$S_{ABA'B'} = \frac{1}{2} AA' \times BB' \to 90 = \frac{1}{2}(2a)(2b) \to ab = 45 \to b = \frac{45}{a}$

$2c = 8\sqrt{3} \to c = 4\sqrt{3}$



$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow[c=4\sqrt{3}]{b=\frac{45}{a}} a^2 = \frac{45^2}{a^2} + 48 \xrightarrow{\times a^2} a^4 = 45^2 + 48a^2 \xrightarrow{a^2=t} t^2 - 48t - 45^2 = 0 \to t = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 45^2}}{1} \xrightarrow{t>0} t = 24 + 51 = 75$$

$\to a^2 = 75 \to a = 5\sqrt{3}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{5}$

۴۱ - گزینه ۳

دو خانه دارای محدودیت است ولی امکانات خانه اول زیر مجموعه خانه سوم نمی باشد پس باید مسأله را تفکیک کنیم.

$\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ $\{۰,۲,۴\}$

$\bigcirc \quad \bigcirc \quad \bigcirc$

دو حالت را در نظر می گیریم: الف) ۰ رقم یکان باشد.

$۵ \times ۴ \times ۱ = ۲۰$

ب) ۰ رقم یکان نباشد (یعنی رقم یکان ۲ یا ۴ باشد) چون یکی از ارقام ۲ یا ۴ به عنوان یکان انتخاب می شوند پس یکی از انتخاب های رقم صدگان کم می شود.

$۴ \times ۴ \times ۲ = ۳۲$

پس کل حالاتی که عدد ساخته شده زوج است برابر $۲۰ + ۳۲ = ۵۲$ می باشد.

۴۲ - گزینه ۳ برای رفتن از A به D طبق اصل ضرب $۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$ حالت وجود دارد. برای برگشت هم ۲۹ حالت وجود دارد (چرا که مسیر رفته قابل برگشت نیست) و در کل طبق اصل ضرب برای رفت و برگشت $۳۰ \times ۲۹ = ۸۷۰$ حالت داریم.

۴۳ - گزینه ۲ عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ خواهد بود:

اگر صدگان، ۴ یا ۵ باشد:

$$\underset{۵}{\underline{۲}}, \underline{۵}, \underline{۴} = ۲ \times ۵ \times ۴ = ۴۰$$

اگر صدگان ۳ و دهگان بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\underline{۱}, \underline{۴}, \underline{۴} = ۴ \times ۴ = ۱۶$$

اگر صدگان ۳ و دهگان صفر و یکان بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\underline{۱}, \underline{۱}, \underline{۴} = ۴$$

طبق اصل جمع کل حالت‌هایی که داریم برابر است با:

$$۴۰ + ۱۶ + ۴ = ۶۰$$

روش دوم:

روش بالا وقتی که اعداد تکرار ارقام دارند، کاربرد زیادی دارد ولی چون در این سوال ارقام تکرار ندارند نیازی به حالت‌بندی نمی‌باشد.

برای این که عدد بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، تنها کافی است که صدگان ۳ یا ۴ یا ۵ باشد.

$$\underset{۳ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۵}{\underline{۳}}, \underline{۵}, \underline{۴} = ۳ \times ۵ \times ۴ = ۶۰$$

۴۴ - گزینه ۲ نکته: به‌ازای مقادیر تعریف شده داریم:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

پس داریم:

$$\binom{۲۱}{۰} + \binom{۲۱}{۱} + \binom{۲۱}{۲} + \underbrace{\binom{۲۱}{۳} + \binom{۲۱}{۴} + \cdots + \binom{۲۱}{۱۸}}_{A} + \binom{۲۱}{۱۹} + \binom{۲۱}{۲۰} + \binom{۲۱}{۲۱} = ۲^{۲۱}$$

ما به‌دنبال مقدار A هستیم. از طرفی می‌دانیم که:

$$\binom{۲۱}{۰} = \binom{۲۱}{۲۱} = ۱ \text{ و } \binom{۲۱}{۱} = \binom{۲۱}{۲۰} = ۲۱ \text{ و } \binom{۲۱}{۲} = \binom{۲۱}{۱۹} = \frac{۲۱ \times ۲۰}{۲} = ۲۱۰$$

این مقادیر را در تساوی به‌دست آمده جای‌گذاری می‌کنیم و به جواب می‌رسیم:

$$۱ + ۲۱ + ۲۱۰ + A + ۲۱۰ + ۲۱ + ۱ = ۲^{۲۱} \rightarrow A = ۲^{۲۱} - ۴۶۴$$

۴۵ - گزینه ۳ زمانی حاصل ضرب رقم ها فرد است که همهٔ رقم ها فرد باشند. یعنی در اعداد ۳ رقمی برای هرکدام از یکان و دهگان و صدگان ۵ انتخاب داریم.

$$\underbrace{\text{۵ حالت}}_{\text{صدگان}}\ \underbrace{\text{۵ حالت}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\text{۵ حالت}}_{\text{یکان}} \rightarrow ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$$

و به همین ترتیب برای اعداد ۲ رقمی تعداد حالات برابر است با:

$$\underbrace{\text{۵ حالت}}_{\text{دهگان}}\ \underbrace{\text{۵ حالت}}_{\text{یکان}} \rightarrow ۵ \times ۵ = ۲۵$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۱۲۵ + ۲۵ = ۱۵۰$$

۴۶ - گزینه ۲ ابتدا آقایان را دور میز قرار می دهیم.

نکته: جایگشت دوری n نفر برای نشستن دور میز برابر $(n-۱)!$ است.

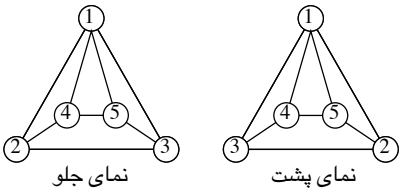
پس برای ۶ مرد داریم:

$$(۶-۱)! = ۵!$$

سپس زنان را بین آقایان قرار می دهیم که تعداد حالات برای این کار برابر با جایگشت خانم ها یعنی !۶ است. (دقت شود که در این مرحله نمی توان از رابطهٔ جایگشت دوری استفاده کرد. چون بعد از نشستن آقایان، دیگر میز متقارن نیست) پس در نهایت تعداد کل حالات برابر است با:

$$۵!۶!$$

۴۷ - گزینه ۴ در اینجا نمی توان از جایگشت دوری استفاده کرد، چون شکل تقارن مرکزی ندارد. پس جایگشت ۵ مهره را شمارش می کنیم که برابر با !۵ است. اما اگر دقت کنیم می بینیم مثلاً دو حالت زیر را باید یک بار شمارش کنیم.



بنابراین جواب نهایی برابر است با: $\frac{۵!}{۲}$

۴۸ - گزینه ۴

از آن جایی که مربع لاتین از مرتبهٔ ۷ است برای این که مجموع دو خانه برابر ۱۱ باشد حالات زیر را درنظر می گیریم:

حالت اول: دو عدد ۶ و ۵ انتخاب شده اند. در این صورت تعداد حالات برابر است با:

$$۷ \times ۷ = ۴۹$$

حالت دوم: دو عدد ۷ و ۴ انتخاب شده اند. در این صورت تعداد حالات برابر است با:

$$۷ \times ۷ = ۴۹$$

پس جواب نهایی برابر است با:

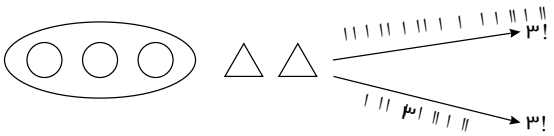
$$۴۹ + ۴۹ = ۹۸$$

۴۹ - گزینه ۳ بیشترین تعداد عددها در حالتی اتفاق می‌افتد که حداکثر یک عدد مضرب ۳ نوشته شده باشد. بین عددهای کوچک‌تر از ۱۰۰، دقیقاً ۳۳ عدد مضرب ۳ وجود دارد، پس ۳۲ تا از این عددها را نباید نوشته باشد، یعنی حداکثر می‌تواند ۶۸ عدد نوشته باشد.

۵۰ - گزینه ۴ ابتدا دو رقم و سه حرف انتخاب می‌کنیم که تعداد روش‌های این کار:

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۴}{۳}$$

۳ حرف انتخابی را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:



بنابراین خواهیم داشت: $\binom{۴}{۲} \times \binom{۴}{۳} \times ۳! \times ۳! = ۶ \times ۴ \times ۶ \times ۶ = ۸۶۴$

۵۱ ـ گزینه ۱ برای فرد بودن عدد باید ۱ یا ۵ در یکان قرار گیرند. پس مسئله را برای ۸ رقم غیر از یکان اینگونه کاهش می‌دهیم:

در صورتی که یکان ۱ باشد:

با ارقام ۱, ۱, ۱, ۴, ۵, ۵, ۶, ۸ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟ با در نظر گرفتن این‌که ارقام تکراری داریم:

$$\frac{۸!}{۳! \times ۲!} = ۳۳۶۰$$

در صورتی که یکان ۵ باشد:

با ارقام ۱, ۱, ۱, ۴, ۵, ۶, ۸ و ۱ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟ با در نظر گرفتن این‌که ارقام تکراری داریم:

$$\frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$$

در نهایت تعداد حالات را با هم جمع می‌زنیم: $۳۳۶۰ + ۱۶۸۰ = ۵۰۴۰$

۵۲ ـ گزینه ۱ تعداد اعدادی که در آن‌ها ارقام یکسان کنار یکدیگرند را به دست آورده از کل تعداد اعدادی که با ارقام عدد ۱۲۴۲۵۴۷۲ می‌توان ساخت، کم می‌کنیم.

اگر سه رقم ۲ را درون یک بسته و دو رقم ۴ را درون یک بسته دیگر فرض کنیم، با ارقام باقیمانده در مجموع $۵! = ۱۲۰$ جایگشت دارند.

$\boxed{۲, ۲, ۲}\ \boxed{۴, ۴}\ ۱, ۵, ۷$

و طبق قضیه جایگشت با تکرار، تعداد اعدادی که می‌توان با ارقام عدد ۱۲۴۲۵۴۷۲ ساخت برابر است با:

$$\frac{۸!}{۳!۲!} = ۳۳۶۰$$

در نتیجه تعداد اعدادی که در آن‌ها ارقام یکسان کنار هم نیستند برابر $۳۳۶۰ - ۱۲۰ = ۳۲۴۰$ است.

۵۳ ـ گزینه ۴ انتخاب ۳ اتاق ۲ نفره:

$$\frac{۶!}{۲!۲!۲!} = ۹۰$$

انتخاب یک اتاق ۳ نفره، یک اتاق ۲ نفره و یک اتاق یک نفره:

$$\binom{۳}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \frac{۶!}{۲! \times ۳!} = ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۷۲۰$$

بنابراین به $۹۰ + ۷۲۰ = ۸۱۰$ طریق می‌توانند اقامت کنند.

۵۴ ـ گزینه ۳ چون مربع لاتین داده شده ۵×۵ است، مربع حاصل از تلفیق این دو مربع به‌صورت زیر است:

عددهای ۱۱ تا ۱۵ را باید دقیقاً یک بار داشته باشیم. پس $b = ۲$ است. عددهای ۴۱ تا ۴۵ نیز باید دقیقاً یک بار دیده شود، پس $a = ۵$ باید باشد. پس دوتایی (b, a) به‌صورت $(۲, ۵)$ است.

۴۳	۱۴		۲۵	
$۱b$	۵۳	۲۴		$۴a$
	۲۲		۴۴	۱۱
۲۱		۴۲	۱۳	
	۴۱	۱۵		۲۳

۵۵ ـ گزینه ۱ نکته: در مورد روابط جایگشت و ترکیب می‌دانیم:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad , \quad C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

با توجه به فرض داده شده. ابتدا عدد طبیعی n را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{n!}{(n-۲)!} - \frac{n!}{۲!(n-۲)!} = ۲۸$$

$$= \frac{۲n! - n!}{(n-۲)!۲!} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!۲!} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۲۸ \Rightarrow n = ۸$$

نکته: رابطهٔ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+۱} = \binom{n+۱}{k+۱}$ برقرار است. پس داریم:

$$C(n,۳) + C(n,۴) = \binom{n}{۳} + \binom{n}{۴} = \binom{n+۱}{۴} \Rightarrow \binom{۸}{۳} + \binom{۸}{۴} = \binom{۹}{۴} = \binom{۹}{۵}$$

۵۶ ـ گزینه ۴ در ریسمان با دو انتهای ثابت، تعداد شکم‌ها برابر شماره‌ی هماهنگ است:

$$f_n = \frac{nv}{۲L} = \frac{n}{۲L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \times \sqrt{\frac{F}{F'}} \Rightarrow \frac{۵۰}{۵۰} = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{\frac{F}{F'}}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{\frac{F}{F'}} \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴} \times \frac{F}{F'} \Rightarrow \frac{F}{F'} = ۴ \Rightarrow F' = \frac{۱}{۴}F$$

۵۷ ـ گزینه ۲ روش اول: می‌توان تعداد فوتون‌های تابشی را با حالت‌های مختلف گذارها به‌دست آورد:

$$۴ \to ۳ \begin{cases} ۳ \to ۲ \to ۱ \\ ۳ \to ۱ \end{cases}$$
$$۴ \to ۲$$
$$۴ \to ۱$$

روش دوم: می‌توان تعداد انواع فوتون‌های تابشی از تراز n به تراز ۱ را از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{۴(۳)}{۲} = ۶$$

۵۸ ـ گزینه ۳ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$ طول موج تابیده شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{۳ \times ۱۰^{۸}}{۵۶۲٫۵ \times ۱۰^{۱۲}} = \frac{۱۶}{۳} \times ۱۰^{-۷} m \xrightarrow{\times ۱۰^{۹}} \lambda = \frac{۱۶}{۳} \times ۱۰^{۲} \simeq ۵۳۳nm$$

چون طول موج به‌دست آمده بین $۴۰۰nm$ تا $۷۰۰nm$ است، در محدودهٔ مرئی قرار دارد. می‌دانیم تنها چهار خط اول رشته بالمر در ناحیهٔ مرئی هستند، بنابراین عدد رشته برابر $n_L = ۲$ است.

(تا همین‌جا فقط گزینهٔ ۳ صحیح است و لازم نیست که n_U را محاسبه کنیم.)

سپس با استفاده از رابطهٔ ریدبرگ $\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{{n_L}^{۲}} - \frac{۱}{n_U^{۲}})$ شمارهٔ n_U را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{{n_L}^{۲}} - \frac{۱}{n_U^{۲}}) \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۱۶}{۳} \times ۱۰^{۲}} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۲^{۲}} - \frac{۱}{n_U^{۲}})$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۱۶} \times ۱۰^{-۲} = \frac{۱}{۱۰۰}(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{n_U^{۲}}) \Rightarrow \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{n_U^{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{n_U^{۲}} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow n_U = ۴$$

۵۹ - گزینه ۲ از رابطهٔ شدت صوت $I = \frac{P}{A}$ و به ازای $A = ۴\pi r^۲$ خواهیم داشت:

$$I = \frac{P}{۴\pi r^۲} \xrightarrow{P=۴\pi \text{ و } r=۱۰} I = \frac{۴\pi}{۴\pi \times ۱۰^۲} \to I = ۱۰^{-۲} W/m^۲$$

$$\to \beta = ۱۰ \log \frac{۱۰^{-۲}}{۱۰^{-۱۲}} = ۱۰ \log ۱۰^{+۱۰} \to \beta = ۱۰۰ dB$$

۶۰ - گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $I = \frac{P}{۴\pi r^۲}$ برای شدت صوت یک منبع کروی با توان P در فاصلهٔ r از آن ، داریم:

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \to \Delta\beta = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} = ۲۰ \log \frac{r_۱}{r_۲}$$

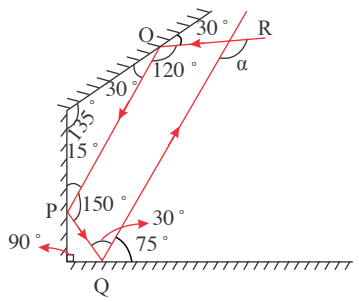
در حالت اول: $r_۱ = r$ ، $r_۲ = r + ۳$ و در حالت دوم: $r_۱ = r$ ، $r_۲ = r - ۲$
و ترازهای شدت صوت نسبی قرینه‌اند. پس داریم:

$$\Delta\beta = \log \frac{I_۲}{I_۱} = \log(\frac{r_۱}{r_۲})^۲ = ۲۰ \log(\frac{r_۱}{r_۲})$$

$$\to ۲۰ \log \frac{r}{r+۳} = ۲۰ \log \frac{r}{r-۲} \to \frac{r+۳}{r} = \frac{r}{r-۲}$$

$$\to r^۲ + r - ۶ = r^۲ \to r = ۶m$$

۶۱ - گزینه ۲ برطبق شکل ترسیم‌شده مقابل، در چهارضلعی $OPQR$، زاویه O برابر ۱۲۰°، زاویهٔ P برابر ۱۵۰° و زاویهٔ Q برابر ۳۰ درجه است.
بنابراین زاویهٔ $R = ۳۶۰ - ۱۵۰ - ۱۲۰ - ۳۰ = ۶۰^\circ$ و α که مکمل آن است ۱۲۰ درجه می‌شود.



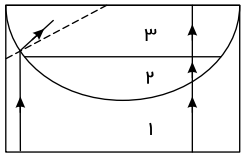
۶۲ - گزینه ۱ طبق قانون اسنل

$$n_۱ \sin ۳۷^\circ = n_۲ \sin ۳۰^\circ = n_۳ \sin ۴۵^\circ = n_۴ \sin ۵۳^\circ$$

بنابراین می‌توان نوشت $n_۱ \sin ۳۷^\circ = n_۴ \sin ۵۳^\circ$ از آنجا که $v = \frac{c}{n}$ بنابراین خواهیم داشت:

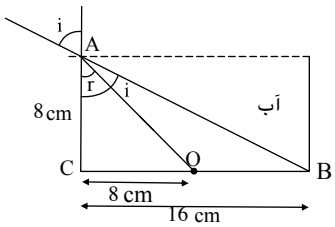
$$\frac{c}{v_۱} \sin ۳۷^\circ = \frac{c}{v_۴} \sin ۵۳^\circ \to \frac{v_۴}{v_۱} = \frac{\sin ۵۳^\circ}{\sin ۳۷^\circ} \xrightarrow[\sin ۳۷^\circ = \cos ۵۳^\circ = ۰/۶]{\sin ۵۳^\circ = ۰/۸} \boxed{\frac{v_۴}{v_۱} = \frac{۰/۸}{۰/۶} = \frac{۴}{۳}}$$

۶۳ - گزینه ۳ چون پرتوی سمت راست در راستای شعاع مرز دایره‌ای قرار ندارد و بدون انحراف از محیط ۱ وارد محیط ۲ می‌شود. طبیعی است که ۱ و ۲ باید هم‌جنس باشند بنابراین $n_۱ = n_۲$



و چون پرتو سمت چپ در ورود از محیط ۱ به محیط ۳ به خط عمود به مرز (که از مرکز انحنای مرز دایره‌ای عبور می‌نماید) نزدیک‌تر می‌شود پس $n_۲$، $n_۳ > n_۱$ (چون $n_۱ = n_۲$).

۶۴ ـ گزینه ۳



$$n = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{CO}{OA}} = \frac{\frac{۱۶}{\sqrt{۸^۲ + ۱۶^۲}}}{\frac{۸}{\sqrt{۸^۲ + ۸^۲}}}$$

$$\rightarrow n = \sqrt{\frac{۸}{۵}}$$

۶۵ ـ گزینه ۴ انرژی $۱۲/۷۵\,eV$ باید برابر با اختلاف انرژی دو ترازی باشد که الکترون بین آن‌ها گذار انجام داده است. با توجه به این اختلاف معلوم می‌شود که $n_U = ۱$ است. داریم:

$$۱۲/۷۵ = E_U - E_L = (-\frac{E_R}{n_U^۲}) - (-\frac{E_R}{۱^۲}) = ۱۳/۶\,eV - \frac{۱۳/۶\,eV}{n_U^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۳/۶\,eV}{n_U^۲} = ۱۳/۶\,eV - ۱۲/۷۵\,eV = ۰/۸۵\,eV \rightarrow n_U^۲ = \frac{۱۳/۶\,eV}{۰/۸۵\,eV} = ۱۶ \rightarrow \boxed{n_U = ۴}$$

* یعنی اتم هیدروژن با جذب $۱۲/۷۵\,ev$ می‌تواند از $n_L = ۱$ به $n_U = ۴$ برود که بلافاصله از این حالت برانگیخته تمایل دارد به حالت پایه $n_L = ۱$ گذار کند. برای این کار ممکن است حالات زیر انجام شود:

$$۴ \begin{cases} \nearrow ۳ & \text{خط اول پاشن} \\ \rightarrow ۲ & \text{خط دوم بالمر} \\ \searrow ۱ & \text{خط سوم لیمان} \end{cases}$$

$$۳ \begin{cases} \nearrow ۲ & \text{خط اول بالمر} \\ \searrow ۱ & \text{خط دوم لیمان} \end{cases}$$

$$۲ \longrightarrow ۱ \quad \text{خط اول لیمان}$$

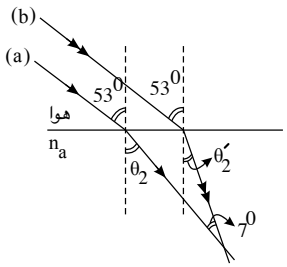
* به طور خلاصه این طول موج، امکان تولید و گسیل خواهد داشت.

۱) خطوط اول، دوم و سوم سری لیمان

۲) خطوط اول و دوم سری بالمر

۳) خط اول پاشن

۶۶ ـ گزینه ۳ گام اول: از اینکه دو پرتوی شکست یافته در محیط شفاف یکدیگر را قطع کرده‌اند در می‌یابیم که پرتو (b) می‌بایستی بیشتر شکست یافته باشد. مطابق شکل مقابل:



گام دوم: برای پرتو (a) قانون اسنل را می‌نویسیم: (ضریب شکست محیط شفاف برای پرتو (a) را با n_a و برای پرتو (b) را با n_b نشان می‌دهیم):

$$n_{\text{هوا}} \times \sin ۵۳^\circ = n_a \times \sin\theta_۲ \rightarrow ۱ \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۳} \times \sin\theta_۲ \rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{۶}{۱۰} \rightarrow \theta_۲ = ۳۷^\circ$$

گام سوم: در مثلث تشکیل‌شده درون مادهٔ شفاف داریم:

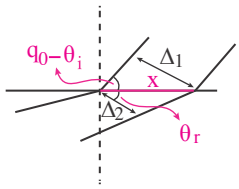
$$۷^\circ + \underbrace{(۹۰ - \theta_۲)}_{۵۳^\circ} + (۹۰ + \theta_۲') = ۱۸۰^\circ \rightarrow \theta_۲' = ۳۰^\circ$$

گام چهارم: حال قانون اسنل را برای پرتو (b) می‌نویسیم:

$$n_{\text{هوا}} \times \sin ۵۳^\circ = n_b \times \sin ۳۰^\circ \rightarrow ۱ \times \frac{۸}{۱۰} = n_b \times \frac{۱}{۲} \rightarrow n_b = \frac{۱۶}{۱۰} \rightarrow \boxed{n_b = \frac{۸}{۵}} \rightarrow v_b = \frac{c}{n_b} = \frac{۳ \times ۱۰^۸ m/s}{\frac{۸}{۵}} = \frac{۱۵}{۸} \times ۱۰^۸ m/s$$

۶۷ - گزینه ۱ به شکل مقابل دقت کنید، پاره‌خط آبی رنگ در هر دو مثلث بالا و پایین مشترک است و وتر هر دو مثلث x است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مثلث بالا} : \sin(۹۰ - \theta_i) = \frac{\Delta_۱}{x} \Rightarrow \cos\theta_i = \frac{\Delta_۱}{x} \Rightarrow \Delta_۱ = x\cos\theta_i \\ \text{مثلث پایین} : \sin(۹۰ - \theta_r) = \frac{\Delta_۲}{x} \Rightarrow \cos\theta_r = \frac{\Delta_۲}{x} \Rightarrow \Delta_۲ = x\cos\theta_r \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta_۱}{\Delta_۲} = \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_r}$$



با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده، مقدار زاویهٔ شکست را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta_۱}{\Delta_۲} = \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_r} \xrightarrow[\theta_i = ۳۷^\circ]{\Delta_۱ = ۱۰cm \ , \ \Delta_۲ = ۷/۵cm} \frac{۱۰}{۷/۵} = \frac{\cos(۳۷^\circ)}{\cos\theta_r} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۰/۸}{\cos\theta_r} \Rightarrow \cos\theta_r = ۰/۶ \Rightarrow \theta_r = ۵۳^\circ$$

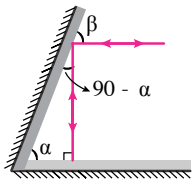
حالا با استفاده از رابطهٔ اسنل به‌سادگی نسبت $\frac{n_۲}{n_۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$n_۱ \sin\theta_i = n_۲ \sin\theta_r \Rightarrow n_۱ \sin(۳۷^\circ) = n_۲ \sin(۵۳^\circ) \Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = \frac{۰/۶}{۰/۸} = \frac{۳}{۴}$$

۶۸ - گزینه ۳ عقرب مسافت ۹۰ متری را با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ طی می‌کند بنابراین با نوشتن معادلهٔ حرکت یکنواخت آن داریم.

$$\Delta x = V_{\text{عقرب}}\, t_{\text{عقرب}} \xrightarrow[V_{\text{عقرب}} = ۲\frac{m}{s}]{\Delta x = ۹۰m} ۹۰ = ۲t_{\text{عقرب}} \Rightarrow t_{\text{عقرب}} = ۴۵s$$

۶۹ - گزینه ۲ زاویهٔ انحراف ۱۸۰° در شکل، یعنی پرتو روی خودش بازتاب شود.



$$۹۰ - \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

۷۰ - گزینه ۴ در رشته؟ بالمر، به ازای $n = ۳, ۴, ۵, ۶$ طول موج‌های گسیلی مرئی و به ازای $n \geq ۷$ طول موج‌های گسیلی فرابنفش هستند. پنجمین خط بالمر به ازای $n' = ۲$ و $n = ۷$ به دست می‌آید. داریم:

$$\frac{۱}{\lambda} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\lambda} = \frac{۱۱}{۱۰۰۰nm}(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴۹}) = \frac{۴۵ \times ۱۱}{۱۹۶۰۰۰} \Rightarrow \lambda = \frac{۱۹۶۰۰۰}{۴۹۵} \approx ۳۹۶nm \ \text{فرابنفش}$$

۷۱ - گزینه ۳ از زیروندهای ۱ و ۲ به ترتیب برای کمیت‌های وابسته به طناب نازک و ضخیم استفاده می‌کنیم. زمان لازم برای آنکه یک تپ با تندی ۷ طنابی به طول L را بپیماید از رابطه $t = \frac{L}{v}$ به‌دست می‌آید، بنابراین چون تپ بازتابشی در مدت $۴s$ طول طناب نازک و تپ عبوری در مدت $۲۰s$ طول طناب ضخیم را می‌پیماید، داریم:

$$\frac{t_۱}{t_۲} = \frac{L_۱}{L_۲} \times \frac{v_۲}{v_۱} \Rightarrow \frac{۴}{۲۰} = \frac{L_۱}{L_۲} \times \frac{v_۲}{v_۱} \Rightarrow \frac{L_۱}{L_۲} = \frac{v_۱}{۵v_۲} \quad (I)$$

تندی حرکت تپ در طنابی به قطر D و چگالی ρ که با نیروی F کشیده شده است از رابطه $v = \frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$ به‌دست می‌آید که با نوشتن شکل مقایسه‌ای آن خواهیم داشت (دقت کنید که طناب‌ها هم‌جنس هستند، پس چگالی ρ برای آن‌ها یکسان است. از طرفی با توجه به نوع اتصال آن‌ها به هم، نیروی کششی در هر دو یکسان است.)

$$\frac{v_۱}{v_۲} = \frac{D_۲}{D_۱} \rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = ۲ \quad (II)$$

حال رابطه (I) را در رابطه (II) قرار می‌دهیم:

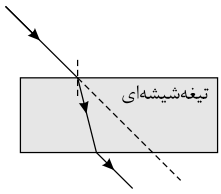
$$(I): \frac{L_۱}{L_۲} = \frac{v_۱}{۵v_۱} \rightarrow \frac{L_۱}{L_۲} = \frac{۱}{۵} \times ۲ = \frac{۲}{۵}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۷۲ - گزینه ۴ ضریب شکست تیغه شیشه‌ای برای نور آبی بیشتر از نور زرد است. بنابراین نور آبی بیشتر از زرد منحرف می‌شود و به خط عمود بر مرز مشترک نزدیک‌تر می‌شود. (رد گزینه‌های ۱ و ۳)

هنگام خروج پرتوها از تیغه در همان راستای اولیه پرتوها از تیغه خارج می‌شوند. (رد گزینهٔ ۱)

بنابراین هر دو پرتوی خروجی با یکدیگر و با پرتوی اولیه موازی هستند.



۷۳ - گزینه ۱ ابتدا انرژی فوتون تابیده شده را به دست می‌آوریم.

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{۱۲۴۰eV \cdot nm}{۳۱۰nm} = ۴eV = ۴ \times ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} = ۶/۴ \times ۱۰^{-۱۹} J$$

بیشنه انرژی جنبشی فوتوالکترون جداشده برابر است با:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳۰} \times (۴ \times ۱۰^۵)^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳۰} \times ۱۶ \times ۱۰^{۱۰} = ۸ \times ۱۰^{-۲۰} = ۰/۸ \times ۱۰^{-۱۹} J$$

در نهایت به کمک معادله؟ فوتوالکتریک، حداقل انرژی لازم برای جدا شدن الکترون از سطح فلز که همان تابع کار فلز است را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{max} = hf - W_۰ = \frac{hc}{\lambda} - W_۰ \Rightarrow ۰/۸ \times ۱۰^{-۱۹} = ۶/۴ \times ۱۰^{-۱۹} - W_۰ \Rightarrow W_۰ = ۵/۶ \times ۱۰^{-۱۹} J$$

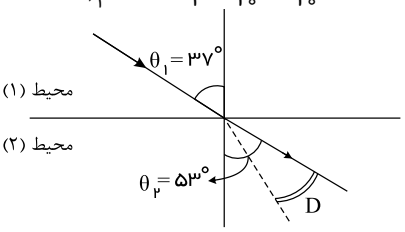
۷۴ - گزینه ۴ تندی نور در محیط (۱) ۲۵٪ کمتر از تندی نور در محیط (۲) است یعنی:

$$v_۱ = v_۲ - \frac{۲۵}{۱۰۰}v_۲ \Rightarrow v_۱ = \frac{۷۵}{۱۰۰}v_۲ \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۳}{۴}$$

زاویهٔ تابش، زاویهٔ بین خط عمود بر سطح جداکننده پرتو تابش است پس: $\theta_۱ = ۳۷^\circ$

از رابطهٔ $\frac{v_۲}{v_۱} = \frac{\sin\theta_۲}{\sin\theta_۱}$ زاویهٔ شکست را بدست می‌آوریم:

$$\sin\theta_۲ = \frac{v_۲}{v_۱}\sin\theta_۱ = \frac{۴}{۳} \times \frac{۶}{۱۰} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \theta_۲ = ۵۳^\circ$$



حال با توجه به شکل زاویه انحراف را به‌دست می‌آوریم:

$$D = \theta_۲ - \theta_۱ = ۵۳^\circ - ۳۷^\circ = ۱۶^\circ$$

۷۵ - گزینه ۲ ابتدا توان خروجی لامپ را به دست می‌آوریم:

$$(\ ۱۲ = P_{\text{خروجی}} \Rightarrow \frac{P_{\text{خروجی}}}{۸۰} = \frac{۱۵}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} = R_a\ (\text{بازده}\ W$$

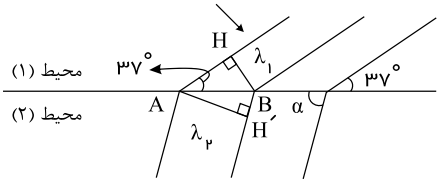
سپس به کمک رابطه? توان، انرژی خروجی فوتون‌ها را محاسبه کرده و آن را بر حسب نیز به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow ۱۲ = \frac{E}{۶۰} \Rightarrow E = ۷۲۰j = \frac{۷۲۰}{۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}} = ۴۵ \times ۱۰^{۲۰}\ eV$$

در نهایت از رابطه? انرژی فوتون‌ها داریم:

$$E = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow ۴۵ \times ۱۰^{۲۰}\ eV = \frac{n \times ۱۲۴۰eV \cdot nm}{۴۹۶nm} \Rightarrow n = \frac{۴۵ \times ۱۰^{۲۰}}{۲/۵} = ۱/۸ \times ۱۰^{۲۱}$$

۷۶ - گزینه ۱ طول موج، فاصله عمودی بین جبهه‌های موج است. بنابراین با توجه به شکل زیر و با فرض اینکه زاویه حاده‌ای که جبهه‌های موج شکست با مرز دو محیط می‌سازد برابر با α است، داریم:



در مثلث ABH داریم:

$$\sin ۳۷ = \frac{\lambda_۱}{AB} = \frac{AB - ۱۲}{AB} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{AB - ۱۲}{AB}$$

$$\Rightarrow ۰/۶AB = AB - ۱۲ \Rightarrow ۰/۴AB = ۱۲ \Rightarrow AB = \frac{۱۲}{۰/۴} = ۳۰cm$$

در مثلث ABH' داریم:

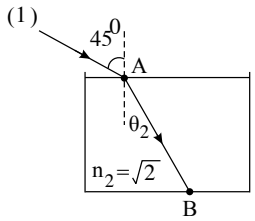
$$\sin\alpha = \frac{\lambda_۲}{AB} = \frac{AB - ۶}{AB} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳۰ - ۶}{۶} = \frac{۲۴}{۳۰} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

زاویه تابش و شکست به‌ترتیب زاویه‌هایی هستند که جبهه موج تابش و جبهه موج شکست با سطح جداکننده دو محیط می‌سازد، پس:

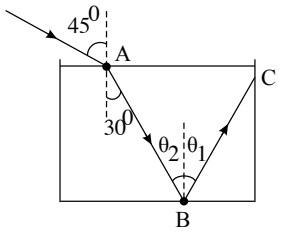
$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{\sin ۳۷}{\sin\alpha} = \frac{v_۱}{v_۲} \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۰/۶}{۰/۸} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \frac{۴}{۳}$$

۷۷ - گزینه ۴ ابتدا زاویه شکست را به کمک قانون اسنل محاسبه می‌کنیم:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \xrightarrow[\pi_۲=\sqrt{۲},\ \theta_۲=?]{n_۱=۱,\ \theta_۱=۴۵^\circ} ۱ \times \sin ۴۵ = \sqrt{۲} \times \sin\theta_۲ \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}\sin\theta_۲ \rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ$$

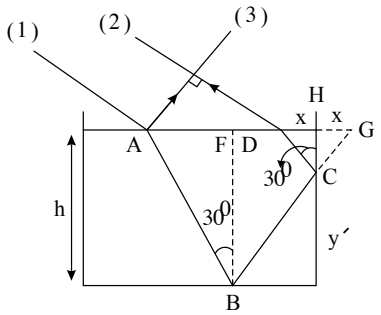


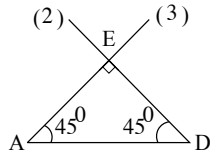
پرتو شکست پس از برخورد با آینه در کف ظرف (نقطهٔ B) بازتاب شده و به آینهٔ عمودی سمت راست (نقطهٔ C) برخورد می‌کند.

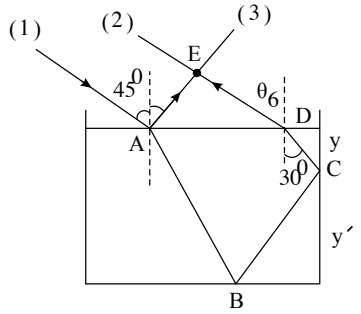


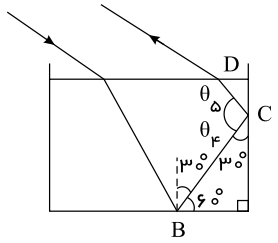
از هندسه می‌دانیم (دو خط موازی و مورب): $\hat{\theta}_۳ = ۳۰^\circ$

از قوانین بازتابش می‌دانیم: $\hat{\theta}_۳ = \hat{\theta}_۴ = ۳۰^\circ$









با توجه به شکل مقابل زوایای تابش و بازتابش برای آینهٔ عمودی در نقطهٔ C عبارتند از: $\hat{\theta}_۴ = \hat{\theta}_۵ = ۶۰^\circ$

پرتو بازتاب نهایی وقتی به نقطهٔ D می‌رسد می‌شکند و مجدداً وارد هوا می‌شود. به کمک قانون اسنل زاویهٔ شکست را محاسبه می کنیم: (اینبار محیط مایع (۲) هوا است.)

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \rightarrow \sqrt{۲} \times \frac{۱}{۲} = ۱ \times \sin\theta_۶ \rightarrow \sin\theta_۶ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \hat{\theta}_۶ = ۴۵^\circ$$

بنابراین پرتوهای بازتاب (۳) و شکست نهایی (۲) برهم عمودند و (۱) با (۲) موازی است.

$$\Delta ADE : \cos ۴۵ = \frac{AE}{AD} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{AD} \rightarrow AD = ۲\sqrt{۳}cm$$

$$AD = AF + FD \rightarrow ۲\sqrt{۳} = AF + FD$$

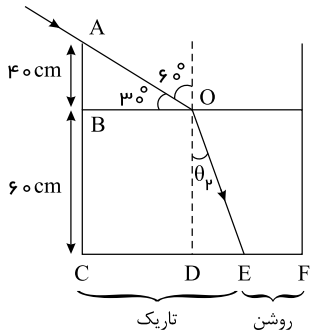
$$\Delta AFB : AF = h\tan ۳۰ \quad \rightarrow FD = (۲\sqrt{۳} - h\tan ۳۰)$$

$$AF = FG = FD + ۲x \; h\tan ۳۰ = (۲\sqrt{۳} - h\tan ۳۰) + ۲x \rightarrow h\tan ۳۰ = \sqrt{۳} + x$$

$$\Delta CDH : x = y\tan ۳۰ \rightarrow h\tan ۳۰ = \sqrt{۳} + y\tan ۳۰ \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}h = \sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}y \rightarrow h = ۳ + y \xrightarrow{y>۰} h > ۳$$

۷۸ ـ گزینه ۲ ابتدا به کمک رابطه اسنل زاویه شکست را می‌یابیم:

$$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ \rightarrow ۱ \times \sin ۶۰ = \sqrt{۳} \times \sin\theta_۲ \rightarrow \sin\theta_۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ$$



حال طول نواحی سایه را می‌یابیم:

$$\Delta ABO : BO = \frac{AB}{\tan ۳۰} = \frac{۴۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = ۴۰\sqrt{۳}cm = CD$$

$$\Delta ODE : DE = \tan ۳۰ \times OD = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۶۰ = ۲۰\sqrt{۳}cm$$

حال طول ناحیه روشن را محاسبه می‌کنیم:

$$EF = CF - CE = CF - (CD + DE)$$

$$EF = ۱۰۰ - (۴۰\sqrt{۳} + ۲۰\sqrt{۳}) = ۱۰۰ - ۶۰\sqrt{۳}$$

مساحت ناحیه روشن : $S = ۱۰۰(۱۰۰ - ۶۰\sqrt{۳}) \rightarrow S \simeq ۸۹۸۰cm^۲$

۷۹ ـ گزینه ۴

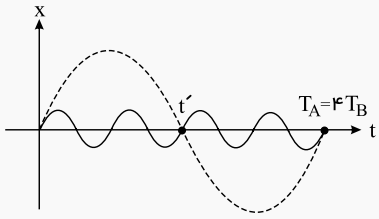
نسبت بلندترین و کوتاه‌ترین طول موج در هر رشته به ترتیب به ازای $n = n' + ۱$ و $n = \infty$ به دست می‌آیند. داریم:

$$\frac{۱}{\lambda_{\max}} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{(n'+۱)^{۲}}) = R(\frac{۱}{۵^{۲}} - \frac{۱}{۶^{۲}}) = \frac{۱۱R}{۳۶ \times ۲۵} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{۳۶ \times ۲۵}{۱۱R}$$

$$\frac{۱}{\lambda_{\min}} = R(\frac{۱}{n'^{۲}} - \frac{۱}{\infty^{۲}}) = \frac{R}{۵^{۲}} = \frac{R}{۲۵} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{۲۵}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \frac{\frac{۳۶ \times ۲۵}{۱۱R}}{\frac{۲۵}{R}} = \frac{۳۶}{۱۱}$$

۸۰ - گزینه ۴ **با توجه به نمودار، رابطهٔ بین دورهٔ موج‌ها را می‌یابیم. (می‌دانیم که توان متوسط انتقال انرژی با مربع دامنه و مربع بسامد تناسب دارد.)**



$$t' = \frac{T_A}{۲} = ۲T_B \rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{۱}{۴}$$

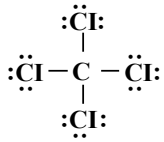
$$\frac{\overline{P}_A}{\overline{P}_B} = ۱ \rightarrow (\frac{A_A}{A_B})^{۲} \underbrace{\boxed{(\frac{f_A}{f_B})^{۲}}}_{(\frac{T_B}{T_A})^{۲}} = ۱ \rightarrow (\frac{AA}{۱})^{۲}(\frac{۱}{۴})^{۲} = ۱ \rightarrow A_A = ۴cm$$

۸۱ - گزینه ۱ انرژی شبکه‌ی بلور با افزایش بار یون و با کاهش شعاع یون، افزایش می‌یابد.

$$\underset{\text{۵ الکترون تبادلی}}{Fe_2O_3} > \overset{\text{۴ الکترون تبادلی}}{FeO} > \underset{\text{۳ الکترون تبادلی}}{FeCl_2}$$

۸۲ - گزینه ۴

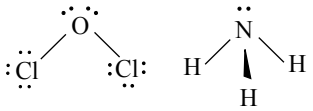
پیوند بین C و Cl قطبی است و مولکول CCl_4 به دلیل ساختار متقارن ناقطبی است.



۸۳ - گزینه ۳ در گروه ۱۷ (هالوژن‌ها) عناصر به صورت مولکول دواتمی دیده می‌شوند که نیروی بین مولکولی آن‌ها، واندروالسی است. در فلزهای قلیایی از بالا به پایین با افزایش جرم اتمی نقطه‌ی ذوب و جوش کاهش می‌یابد.

۸۴ - گزینه ۱

از ترکیب‌های پیشنهاد شده در گزینه‌های این پرسش، تنها NH_3 و Cl_2O، هر دو قطبی‌اند و به دلیل خاصیت نافلزی بیشتر اتم مرکزی در آن‌ها (N نسبت به H و O نسبت به Cl)، جفت الکترون‌های پیوندی در آنها، به اتم مرکزی نزدیک‌ترند.



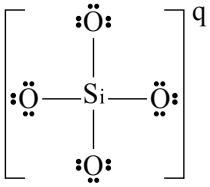
۸۵ - گزینه ۳ انرژی شبکه با بار یون‌های تشکیل‌دهنده‌ی بلور رابطه‌ی مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطه‌ی وارونه دارد. بنابراین مقایسه‌ی انرژی شبکه ترکیب‌های داده شده به صورت زیر است:

انرژی شبکه: $AlF_3 > MgO > MgF_2 > Na_2O > NaF$

۸۶ - گزینه ۴ گوگرد یک نافلز است که در ترکیب‌های یونی به‌صورت یون منفی در می‌آید و درنتیجه شعاع اتم آن از شعاع یون پایدارش کوچکتر است.

شعاع: $S < S^{2-}$

۸۷ - گزینه ۳ با توجه به اینکه سیلیسیم در گروه ۱۴ و اکسیژن در گروه ۱۶ به ترتیب دارای ۴ و ۶ الکترون در لایهٔ ظرفیت خود هستند؛ داریم:



$$q = \underbrace{[4 + 4(6)]}_{\text{مجموع الکترون‌های ظرفیت اتم‌ها}} - \left[\underbrace{4(2)}_{\text{الکترون‌های پیوندی}} + \underbrace{12(2)}_{\text{الکترون‌های ناپیوندی}}\right] = -4$$

بررسی گزینه ها:

الف) یون سولفات (SO_4^{2-}) نیز مانند این یون ۴ جفت پیوندی و ۱۲ جفت ناپیوندی دارد.

ب) $SiO_4^{4-} = Si + 4(-2) = -4 \Rightarrow Si = +4$

$CO_3^{2-} = C + 3(-2) = -2 \Rightarrow C = +4$

پ) مجموع بار یون فسفات (PO_4^{3-}) و یون آمونیوم (NH_4^+) برابر -2 است که با این یون برابر نیست.

ت) در ساختار جامدهای کووالانسی، شبکهٔ غول‌آسایی از اتم‌ها وجود دارد.

۸۸ - گزینه ۲ در مورد ترکیب های سایر گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ (۱): آب و آمونیاک ترکیبی مولکولی و آمونیوم کلرید ترکیبی یونی می‌باشد.

گزینهٔ (۳): گرافیت و گرافن ترکیبی کووالانسی و گلوکوز ترکیبی مولکولی می‌باشد.

گزینهٔ (۴): کربن دی اکسید و کربن تتراکلرید، ترکیبی مولکولی و سیلیسیم کربید ترکیبی کووالانسی می باشد.

۸۹ - گزینه ۴ مولکول متان (CH_4) با جایگزین کردن سه اتم هیدروژن آن با اتم‌های کلر به کلروفرم $(CHCl_3)$ تبدیل می‌شود که به دلیل جاذبهٔ قوی تر مولکول‌های قطبی حاصل، حالت فیزیکی آن از گاز به مایع تغییر می‌کند.

مولکول حاصل قطبی بوده و نقشهٔ پتانسیل الکترواستاتیکی آن با مولکول ناقطبی متان متفاوت خواهد بود.

همچنین با افزایش جرم مولی در کلروفرم و ثابت ماندن تعداد اتم‌های کربن، درصد جرمی اتم کربن در ترکیب حاصله نسبت به متان کم تر است.

۹۰ - گزینه ۲ در واکنش تشکیل سدیم کلرید از عناصر سازنده‌اش که با تولید نور و گرمای زیادی همراه است، یون‌های Na^+ و Cl^- هم‌الکترون نیستند:

$_{11}Na^+ = [Ne]$ و $_{17}Cl^- = [Ar]$

واکنش انجام شده از نوع اکسایش - کاهش است، ولی مجموع ضرایب فرآورده‌ها و واکنش دهنده‌ها با یکدیگر برابر نیست.

$2Na(s) + Cl_2(g) \rightarrow 2NaCl(s)$

۹۱ - از میان گونه‌های داده شده، $C_2H_2 - CO_2 - OCN^- - N_2O$ و NO_2^+ دارای ساختار خطی هستند (اتم مرکزی در این گونه‌ها فاقد جفت الکترون ناپیوندی است) و درگزینه ۳ گونه‌های $NO_2^+ - CO_2 - OCN^- - N_2O$ اتم مرکزی به دلیل خصلت نافلزی کم‌تر دارای بار جزئی مثبت است.

$CO_2 \rightarrow \ddot{\underset{..}{O}} = C = \ddot{\underset{..}{O}}$

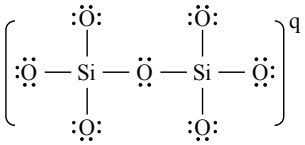
$C_2H_2 \rightarrow H - C \equiv C - H$

$N_2O \rightarrow : N \equiv N - \ddot{\underset{..}{O}} :$

$NO_2^+ \rightarrow \left[\ddot{\underset{..}{O}} = N = \ddot{\underset{..}{O}}\right]^+$

$OCN^- \rightarrow \left[: \ddot{\underset{..}{O}} - C \equiv N :\right]^-$

۹۲ - گزینه ۱



تعداد الکترون موجود در ساختار = ۵۶

تعداد الکترون های ظرفیتی = $2(4) + 7(6) = 50$

$q = 50 - 56 = -6$

در آنیون سیلیکات SiO_4^{4-} بار الکتریکی برابر ۴ است؛ پس:

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

۹۳ - گزینه ۲ بررسی موارد:

آ) درست

ب) درست

پ) نادرست، موادی که سخت و شکننده نیستند و در حالت جامد رسانایی جریان برق ندارند، جامد مولکولی به شمار می آیند.

ت) نادرست، پروپان و دی اتیل اتر دارای جرم مولی برابر نیستند.

۹۴ - گزینه ۴ A همان SiO_2، B همان Si و C همان CO_2 است. ماسه از نمونه های ناخالص سیلیس (SiO_2) است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینهٔ ۱) پخته شدن نان سنگک بر روی دانه های درشت سنگ را می توان نشانه ای از مقاومت گرمایی سیلیس (SiO_2) دانست.

گزینهٔ ۲) SiO_2 فراوان ترین اکسید در پوستهٔ زمین است و در دمای اتاق و فشار یک اتمسفر به حالت جامد می باشد.

گزینهٔ ۳) نافلز سبک تر در CO_2 همان کربن می باشد. تاکنون از کربن هیچ یون تک اتمی در هیچ ترکیبی شناخته نشده است.

۹۵ - گزینه ۳ ابتدا باید ببینیم چند گرم از این آلیاژ را فلزهای Zn و Cu تشکیل داده‌اند:

$?gZn = 1.2g\ \text{مخلوط} \times \frac{60gZnO}{100g\ \text{مخلوط}} \times \frac{65gZn}{81gZnO} \simeq 0.58gZn$

$?gCu = 1.2g\ \text{مخلوط} \times \frac{40gCuSO_4}{100g\ \text{مخلوط}} \times \frac{64gCu}{160gCuSO_4} \simeq 0.192gCu$

$\Rightarrow ?gSn = 1.8 - (gZn + gCu) = 1.03gSn$

درصد جرمی Sn در آلیاژ مورد نظر $= \frac{1.03}{1.8} \times 100 \simeq 57.2\%$

۹۶ - گزینه ۴ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش:

$$2V^{5+} + (n)Zn \rightarrow 2V^{(5-n)+} + nZn^{2+}$$

$$\frac{\text{حجم}\,(ml) \times \text{غلظت مولی}}{1000 \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \rightarrow \frac{0/025 \times 200}{2 \times 1000} = \frac{325 \times 10^{-3}}{(5-n) \times 65} \Rightarrow n = 2$$

تغییر عدد اکسایش وانادیم $+2$ و یون تولیدشدهٔ وانادیم (III)، سبز رنگ خواهد بود.

۹۷ - گزینه ۴ جرم خاک رس اولیه را ۱۰۰ گرم درنظر می‌گیریم که ۴۲/۵ گرم آن سیلیس و ۱۵ گرم آن آب است. جرم آب افزوده‌شده به خاک رس را به هنگام تهیهٔ گل رس محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی آب در گل رس} = \frac{\text{جرم آب افزوده‌شده} + \text{جرم اولیهٔ آب}}{\text{جرم آب افزوده‌شده} + \text{جرم خاک رس اولیه}} \times 100 \Rightarrow \frac{50}{100} = \frac{15+x}{100+x} \Rightarrow x = 70g$$

پس جرم آب افزوده‌شده برابر ۷۰ گرم و جرم گل رس برابر ۱۷۰ گرم خواهد بود. درنتیجه:

$$\text{درصد جرمی سیلیس در گِل رس} = \frac{42/5}{170} \times 100 = 25\%$$

۹۸ - گزینه ۴ به جز عبارت سوم، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

عبارت اول: فلز روی اکسایش می‌یابد و کاهنده است در حالی که نمک وانادیم (V) کاهش یافته و اکسنده است.

عبارت دوم: محلول نمک وانادیم(III) سبز رنگ است:

$$_{23}V^{3+} : \underbrace{1s^2\,2s^2}_{l=0}\ \underbrace{2p^6}_{l=1}\ \underbrace{3s^2}_{l=0}\ \underbrace{3p^6}_{l=1}\ 3d^2$$

با توجه به آرایش الکترونی V^{3+}، در این یون ۱۲ الکترون دارای $l = 1$ $(3p^6, 2p^6)$ و ۶ الکترون دارای $l = 0$ $(1s^2, 2s^2, 3s^2)$ هستند. یعنی تعداد الکترون‌های با $l = 1$ دو برابر تعداد الکترون‌های با $l = 0$ است.

عبارت سوم: محلول‌های نمک وانادیم (III) و وانادیم (II) به ترتیب سبز و بنفش رنگ هستند:

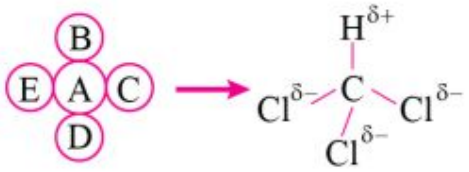
$$_{23}V^{3+} : 1s^2\,2s^2\,\underbrace{2p^6}_{l=1}\,3s^2\,\underbrace{3p^6}_{l=1}\,3d^2\} \Rightarrow l = 1 \text{ با ۱۲ الکترون}$$

$$_{23}V^{2+} : 1s^2\,2s^2\,\underbrace{2p^6}_{l=1}\,3s^2\,\underbrace{3p^6}_{l=1}\,3d^3\} \Rightarrow l = 1 \text{ با ۱۲ الکترون}$$

همانطور که دیده می‌شود، دو یون تعداد الکترون‌های با $l = 1$ یکسانی دارند.

عبارت چهارم: در تبدیل مورد نظر، عدد اکسایش وانادیم از $+2$ به $+4$ افزایش می‌یابد، پس V^{2+} نقش کاهنده را ایفا می‌کند.

۹۹ - گزینه ۱ همهٔ عبارت‌های مطرح شده درست هستند. در مورد عبارت سوم که A،B،C،D و E به ترتیب اتم‌های C،H،Cl،Cl و Cl هستند:



۱۰۰ - گزینه ۱ به جز عبارت (پ)، بقیه عبارت‌ها درست‌اند.

عبارت پ) محلول یون $V^{۳+}$، سبز و محلول حاوی یون $V^{۲+}$، بنفش رنگ است. از طرفی می‌دانیم که طول موج نور سبز بلند تر از نور بنفش است.

۱۰۱ - گزینه ۳ موارد اول، دوم و چهارم درست است. عنصر D عنصر Mg است و چون در ترکیب یونی به‌صورت $Mg^{۲+}$ ظاهر می‌شود، آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب حاصل از D و X نسبت به LiF که کاتیون آن یک بار مثبت است، بیشتر است.

مورد دوم: با توجه به اینکه عنصر A یک بار مثبت است و ترکیب AX را به وجود آورده است، نتیجه می‌گیریم که بار X هم یک بار منفی است. با درنظر گرفتن اینکه Li^{+} و F^{-} کمترین شعاع اتمی را بین کاتیون و آنیون‌های یک بار مثبت و منفی دارند، در نتیجه LiF قطعاً آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور بیشتری نسبت به AX دارد.

مورد سوم نادرست است؛ اگر X در گروه ۱۶ قرار داشته باشد، با عنصر A ترکیبی به‌صورت $A_۲X$ تشکیل می‌دهد که نقطهٔ ذوب بیشتری به علت آنیون ۲ بار منفی نسبت به LiF دارد.

مورد چهارم درست است؛ زیرا یون کلسیم دارای شعاع بیشتری بوده و آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب D و X نسبت به ترکیب یونی Mg و X کمتر است.

۱۰۲ - گزینه ۲ مورد (آ) درست

$$\text{انرژی شبکهٔ بلور}\quad \underbrace{CsI}_{\text{شعاع زیاد}} < \cdots < LiF$$

مورد (ب) نادرست. انرژی فروپاشی شبکهٔ یونی $NaCl$ به‌صورت زیر است:

$$۱NaCl(s) \rightarrow Na^{+}(g) + Cl^{-}(g)$$

مورد (پ) نادرست. عدد کوئوردینانسیون Cl^{-} در $NaCl$ برابر ۶ است.، تعداد الکترون‌های جابه‌جا شده در $Al_۲O_۳$ نیز ۶ است.

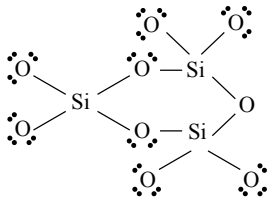
مورد (ت) درست. وجود مواد یونی در طبیعت گواه غلبه جاذبهٔ یون‌های ناهم‌نام به دافعهٔ یون‌های هم‌نام است.

۱۰۳ - گزینه ۲ از نظر انرژی شبکهٔ بلور:

$$MgO > MgI_۲ > NaI > KI$$

۱۰۴ - گزینه ۱ همهٔ موارد درست‌اند. در مورد عبارت (ت) دقت کنید که عنصرهای سازندهٔ جامدهای کووالانسی، کربن و سیلیسیم‌اند که در طبیعت، یون تک اتمی تشکیل نمی‌دهند.

۱۰۵ - گزینه ۲ اگر با قراردادن الکترون‌های ناپیوندی ساختار لوویس یون داده شده کامل شود، بر روی هر کدام از اکسیژن‌های کناری یک بار منفی قرار می‌گیرد که برای گونهٔ داده شده بار یون برابر ۶− می‌شود.



۱۰۶ - گزینه ۲ در گونه‌های هم‌الکترون هر چه عدد اتمی بیشتر باشد شعاع اتمی کمتر است.

۱۰۷ - گزینه ۱

$$Na_۲O(s) + ۲۴۸۸KJ \rightarrow ۲Na^{+}(g) + O^{۲-}(g) : \text{فرایند فروپاشی شبکه}$$

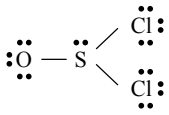
$$\begin{array}{ccc} Na_۲O\ \text{۶۲ گرم} & \text{انرژی}\ ۲۴۸۸KJ & \\ ۷٫۷۵ & x & \end{array} \Rightarrow x = \frac{۲۴۸۸ \times ۷٫۷۵}{۶۲} = ۳۱kg$$

$$۷٫۷۵ \times \frac{۱molNa_۲O}{۶۲gNa_۲O} \times \frac{\text{یون}\ ۳mol}{۱molNa_۲O} = ۰٫۳۷۵mol\ \text{یون}$$

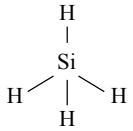
۱۰۸ - گزینه ۳ گزینه «۱»: درست. $SiH_۴, SO_۳$ و $CO_۲$ مولکول‌های ناقطبی هستند، ولی $CSO, SOCl_۲$ و $PCl_۳$ مولکول‌های قطبی می‌باشند.

گزینه «۲»: درست. اکسیژن خصلت نافلزی بیشتری از کربن دارد و الکترون‌های پیوندی را به سمت خود می‌کشد.

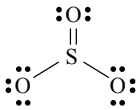
گزینه «۳» نادرست:



مولکول قطبی



مولکول ناقطبی



مولکول ناقطبی

مولکول‌های SO_3 و SiH_4 در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند، ولی $SOCl_2$ به دلیل قطبی بودن در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

گزینه «۴» درست. شکل فضایی $O = C = S$ شبیه $O = C = O$ به صورت خطی است.

۱۰۹ - گزینه ۴ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: با توجه به این‌که چگالی الماس بیشتر از گرافیت است، در جرم‌های برابر، گرافیت حجم بیشتری را نسبت به الماس اشغال می‌کند.

گزینهٔ «۲»: الماس دارای ساختار سه‌بعدی است و گرافیت دارای ساختاری دوبعدی و لایه‌لایه.

گزینهٔ «۳»: با توجه به این‌که طول پیوند کربن-کربن در گرافیت کمتر از کربن-کربن در الماس است، می‌توان نتیجه گرفت که آنتالپی پیوند کربن-کربن در گرافیت بیشتر از الماس است.

۱۱۰ - گزینه ۴

ابتدا واکنش‌های تجزیه پتاسیم نیترات و برقکافت آب را می‌نویسیم:

$$4KNO_3(s) \rightarrow 2K_2O(s) + 2N_2(g) + 5O_2(g)$$

$$2H_2O(l) \xrightarrow{\text{برقکافت}} 2H_2(g) + O_2(g)$$

در فرایند برقکافت آب، به ازای تولید یک مول O_2، ۴ مول الکترون مبادله می‌شود. تعداد مول گاز تولید شده حاصل از برقکافت آب برابر است با:

$$1/6mole^- \times \frac{1molO_2}{4mole^-} = 0/4molO_2$$

حال جرم KNO_3 تجزیه شده را تعیین می‌کنیم:

$$?gKNO_3 = 0/4molO_2 \times \frac{4molKNO_3}{5molO_2} \times \frac{101gKNO_3}{1molKNO_3} = 32/32gKNO_3$$

جرم کلسیم کربنات در مخلوط اولیه برابر است با:

$$\text{جرم کلسیم کربنات در نمونه اولیه} = 129/28 - 32/32 = 96/96g$$

$$\text{درصد جرمی کلسیم کربنات در مخلوط اولیه} = \frac{96/96}{129/28} \times 100 = 75$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳	۱۷ - ۲	۳۳ - ۳	۴۹ - ۳	۶۵ - ۴	۸۱ - ۱	۹۷ - ۴
۲ - ۳	۱۸ - ۱	۳۴ - ۱	۵۰ - ۴	۶۶ - ۳	۸۲ - ۴	۹۸ - ۴
۳ - ۲	۱۹ - ۳	۳۵ - ۴	۵۱ - ۱	۶۷ - ۱	۸۳ - ۳	۹۹ - ۱
۴ - ۳	۲۰ - ۳	۳۶ - ۲	۵۲ - ۱	۶۸ - ۳	۸۴ - ۱	۱۰۰ - ۱
۵ - ۱	۲۱ - ۳	۳۷ - ۱	۵۳ - ۴	۶۹ - ۲	۸۵ - ۳	۱۰۱ - ۳
۶ - ۱	۲۲ - ۱	۳۸ - ۳	۵۴ - ۳	۷۰ - ۴	۸۶ - ۴	۱۰۲ - ۲
۷ - ۱	۲۳ - ۴	۳۹ - ۲	۵۵ - ۱	۷۱ - ۳	۸۷ - ۳	۱۰۳ - ۲
۸ - ۲	۲۴ - ۱	۴۰ - ۱	۵۶ - ۴	۷۲ - ۴	۸۸ - ۲	۱۰۴ - ۱
۹ - ۲	۲۵ - ۴	۴۱ - ۳	۵۷ - ۲	۷۳ - ۱	۸۹ - ۴	۱۰۵ - ۲
۱۰ - ۳	۲۶ - ۲	۴۲ - ۳	۵۸ - ۳	۷۴ - ۴	۹۰ - ۲	۱۰۶ - ۲
۱۱ - ۴	۲۷ - ۴	۴۳ - ۲	۵۹ - ۲	۷۵ - ۲	۹۱ - ۳	۱۰۷ - ۱
۱۲ - ۳	۲۸ - ۳	۴۴ - ۲	۶۰ - ۴	۷۶ - ۱	۹۲ - ۱	۱۰۸ - ۳
۱۳ - ۲	۲۹ - ۱	۴۵ - ۳	۶۱ - ۲	۷۷ - ۴	۹۳ - ۲	۱۰۹ - ۴
۱۴ - ۱	۳۰ - ۲	۴۶ - ۲	۶۲ - ۱	۷۸ - ۲	۹۴ - ۴	۱۱۰ - ۴
۱۵ - ۱	۳۱ - ۱	۴۷ - ۴	۶۳ - ۳	۷۹ - ۴	۹۵ - ۳	
۱۶ - ۳	۳۲ - ۴	۴۸ - ۴	۶۴ - ۳	۸۰ - ۴	۹۶ - ۴	